ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ VII

Л. Д. ЛАНДАУ
Е. М. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

朗道

理论物理学教程 第七卷

弹性理论（第五版）

Л. Д. 朗道 Е. М. 栗弗席兹 著 曹富新 译


高等教育出版社

《理论物理学教程》（共十卷）是一部享誉世界的理论物理学巨著，是反映经典物理学向现代物理学转变的里程碑式的重要著作，于1962年获得列宁奖。原著为俄文，现已有十余种文字的分卷译本，六种文字的全卷译本。本教程中的七卷是由诺贝尔物理学奖获得者、苏联科学院院士、伟大的理论物理学家 Л. Д. 朗道和他的学生、苏联科学院院士、杰出的理论物理学家 E. M. 栗弗席兹在20世纪40—50年代陆续编写而成的，另外三卷由栗弗席兹和俄罗斯科学院院士 Л. П. 皮塔耶夫斯基等人按朗道的计划在20世纪60—70年代编写完成，后经不断补充完善，现已成为举世公认的经典学术著作。本套教程内容丰富、立论明确、论证严谨、物理图像清晰，涵盖了理论物理学从微观到宏观的各个领域，各卷中附有丰富的习题及解答，是学习理论物理学的必备参考书。

本书是《理论物理学教程》的第七卷，根据俄文最新版译出。本书系统地讲述了弹性力学的基本理论和方法，重点讨论了弹性理论的基本方程，介绍了半无限弹性介质问题，固体接触问题的经典解法和晶体的弹性性质，还讨论了板和壳的问题，杆的扭转和弯曲以及弹性系统的稳定性问题，并用宏观连续介质力学方法深入地阐述了弹性波以及振动的理论问题，位错的力学问题，固体的热传导和黏性理论以及液晶的力学理论。本书叙述精练，推演论证严谨，更着重于问题的物理描述。本书可作为高等学校物理专业高年级本科生教学参考书，也可供相关专业的研究生和科研人员参考。

学科类别：物理



ISBN 978-7-04-026382-4

定价 38.00 元



ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ VII

Л. Д. ЛАНДАУ
Е. М. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

理论物理学教程 第七卷

弹性理论

（第五版）

Л. Д. 朗道 Е. М. 栗弗席兹 著 曹富新 译

俄罗斯联邦教育部推荐大学物理专业教学参考书

 高等教育出版社

图字：01-2007-0916 号

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. В 10 томах
Copyright© FIZMATLIT PUBLISHERS RUSSIA, ISBN 5-9221-0053-X
The Chinese language edition is authorized by FIZMATLIT PUBLISHERS RUSSIA for publishing and sales in the People's Republic of China

图书在版编目(CIP)数据

理论物理学教程，第7卷. 弹性理论：第5版/(俄罗斯)朗道，(俄罗斯)栗弗席兹著；曹富新译. —北京：高等教育出版社，2009.3

ISBN 978-7-04-026382-4

Ⅰ. 理… Ⅱ. ①朗…②栗…③曹… Ⅲ. ①理论物理学-教材 ②弹性理论-教材 Ⅳ. O41 O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 003773 号

策划编辑	王 超	**责任编辑**	王 超	**封面设计**	刘晓翔
版式设计	陆瑞红	**责任校对**	杨凤玲	**责任印制**	陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	涿州市京南印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16		
印 张	14.25	版 次	2009年3月第1版
字 数	260 000	印 次	2009年3月第1次印刷
插 页	1	定 价	38.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 26382-00

第四版序言

本书第四版的基本内容（第一至三章，第五章）与其第一，二版（1944，1953年。在前两版中，曾将弹性理论与流体力学合并为《连续介质力学》出版）相比较，只有很小的变动。这是很自然的，因为弹性理论的基本方程和结论在很久以前就已经“定型”了。

在第三版（1965年）增加了关于晶体的位错理论一章（与A.M.科谢维奇共同编写），这一章现在只作了比较小的改动。

本版增加了新奉献的一章——液晶力学，与Л.П.皮塔耶夫斯基共同编写。这是连续介质力学的新分支，它本身同时带有流体和弹性介质固有的力学特征。因此，以后在本教程的编排中，无论是讲述流体力学还是固体弹性理论，都将适当地介绍连续介质力学。

照样，在本书涉及的许多问题的研究中，我从自己朋友们和同事们那里获取了很多的益处。说到这里，我由衷的感谢Г.Е.沃劳韦卡（Г.Е. Воловика），В.Л.根兹布拉伽（В.Л. Гинзбурга），В.Л.依捷包玛（В.Л. Инденбома），Е.И.卡兹（Е.И. Кац），Ю.А.考协尼洽（Ю.А. Косенича），В.В.列别捷娃（В.В. Лебедева），В.П.米尼叶娃（В.П. Миниева），他们对于本书的计算工作提出了许多有益的意见。

苏联科学院物理研究所　E.M.栗弗席兹

1985年1月

PDG

择自《连续介质力学》的序言

……这本由物理学家写的书，首先也是针对物理学家的。自然，对我们感兴趣的是通常在弹性理论教程中不讲述的问题，例如热传导和固体黏性问题，弹性振动理论和波的许多问题。与此同时，我们只能很简单地接触一些专门的问题（例如，复杂的弹性理论的数学方法，薄壳理论等等）。更何况，在某种程度上，作者也不是这些方面专家。

Л.Д.朗道，Е.М.栗弗席兹
1953年



符　　号

ρ 物质密度

$\boldsymbol{u}$ 位移矢量

$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ 应变张量

σ_{ik}应力张量

K 各向均匀压缩模量(体积模量)

μ 剪切模量

E 拉伸模量(杨氏模量)

σ 泊松系数(泊松比)

c_l纵向声速(纵波波速)

c_t横向声速(横波波速)

通过 K,μ 或 E,σ 表示 c_l 和 c_t 的表达式,见 §22.

K,μ 和 E,σ 之间的关系公式:

$$E=\frac{9K\mu}{3K+\mu},\quad \sigma=\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)},$$

$$K=\frac{E}{3(1-2\sigma)},\quad \mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

全书采用通常的矢量和张量的指标求和法则:在给定的表达式中,所有重复两次的指标("傀标")表示将该量按指标 1,2,3 求和.

在第六章中,关于坐标的微分算子利用了符号 ∂_i,$\partial_i\equiv\partial/x_i$.

在引用本《理论物理学教程》其它各卷章节和公式的号码时,给出卷号对应的书名:

第一卷:《力学》,

第二卷:《场论》,

第三卷:《量子力学(非相对论理论)》,

第四卷:《量子电动力学》,

第五卷:《统计物理学 I》,

第六卷:《流体力学》,
第八卷:《连续介质电动力学》,
第九卷:《统计物理学Ⅱ(凝聚态理论)》,
第十卷:《物理动理学》。

PDG

目　　录

第一章

弹性理论的基本方程

§1　应变张量

弹性理论的内容，就是把固体作为连续介质来考虑的力学①.

在作用力的影响下，固体将不同程度地发生**形变**②，即它将改变原来的形状和体积. 对物体形变的数学描述，将按下述方法进行. 物体任意一点的位置由该点在某一坐标系中的径矢 $\boldsymbol{r}$（分量为 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$）来确定. 一般来说，当物体形变时，物体上所有的点都会有移动. 现在来研究其中的任一确定点，如果在形变前它的径矢为 $\boldsymbol{r}$，形变后它将为另一径矢 $\boldsymbol{r}'$（分量为 x_i'）. 于是，在形变时，物体上点的位移可以表示为矢量 $\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$，记为 $\boldsymbol{u}$：

$$u_i = x_i' - x_i \tag{1.1}$$

矢量 $\boldsymbol{u}$ 称为**位移矢量**③. 自然，点在位移后的坐标 x_i' 是该点在位移前坐标 x_i 的函数. 因此，位移矢量也是坐标 x_i 的函数. 把矢量 $\boldsymbol{u}$ 作为 x_i 的函数给出后，物体的形变也就完全确定了.

当物体形变时，点与点之间的距离也会改变. 现在来考虑任意两个无限接近的点. 如果形变前两点间的径矢为 $\mathrm{d}x_i$，则物体形变后该两点间的径矢将变为 $\mathrm{d}x_i' = \mathrm{d}x_i + \mathrm{d}u_i$. 两点之间的距离在形变前为

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2},$$

形变后为

$$\mathrm{d}l' = \sqrt{\mathrm{d}x_1'^2 + \mathrm{d}x_2'^2 + \mathrm{d}x_3'^2}.$$

根据求和记法的一般法则，有

---

① 弹性理论的基本方程是柯西（A. L. Cauchy）和泊松（S. D. Poisson）在 19 世纪 20 年代建立的.

② 形变亦称为变形. 拉伸（压缩）、弯曲、扭转、剪切等是形变的基本形式　　——译者注

③ 俄文版原文为变形矢量或位移矢量，本书按我国的习惯均译为后者.　　——译者注

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x_i^2,\ \mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}x_i'^2 = (\mathrm{d}x_i + \mathrm{d}u_i)^2,$$

由于 $\mathrm{d}u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k$，$\mathrm{d}l'^2$ 就可以重新写为

$$\mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}l^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_l.$$

因为等式右边第二项的指标 i 和 k 都是傀标，可以把它们重新排列并写为明显的对称形式：

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k,$$

而在第三项中，交换指标 i 和 l 的位置，最后得到

$$\mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}l^2 + 2u_{ik}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k, \tag{1.2}$$

式中

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right). \tag{1.3}$$

这些表达式确定了物体形变时线元(长度单元)的改变. 张量 u_{ik} 称为**应变张量**，按照定义，它是对称张量，即

$$u_{ik} = u_{ki}. \tag{1.4}$$

像所有对称张量一样，可以把每一个给定点的应变张量 u_{ik} 变换到主轴上. 也就是说，在任意给定点都可以选择张量的主轴坐标系. 在这个坐标系中，张量 u_{ik} 的所有分量，只有对角分量 u_{11}，u_{22}，u_{33} 不为零. 这些分量称为应变张量的主值，分别用 $u^{(1)}$，$u^{(2)}$，$u^{(3)}$ 表示. 当然，必须记住，假使在物体某点上张量 u_{ik} 变换到主轴上，但是，一般来说，在物体的所有其它点上却是非对角化张量.

如果把给定点的应变张量变换到主轴上，那么在包围该点的体元内，线元(1.2)具有如下形式：

$$\mathrm{d}l'^2 = (\delta_{ik} + 2u_{ik})\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k = (1 + 2u^{(1)})\mathrm{d}x_1^2 + (1 + 2u^{(2)})\mathrm{d}x_2^2 + (1 + 2u^{(3)})\mathrm{d}x_3^2.$$

我们看到，这个表达式已被分解为三个独立的项. 这就是说，在物体的任一体元内，都可以把形变看作是按三个相互垂直方向——应变张量主轴方向上的三个独立形变的组合. 每一个这样的形变都是沿着相应方向的简单拉伸(或压缩)：沿第一主轴方向，$\mathrm{d}x_1$ 的长度变为

$$\mathrm{d}x_1' = \sqrt{1 + 2u^{(1)}}\,\mathrm{d}x_1,$$

对于另外两个主轴方向，也可类似地求出. 因此，值

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1$$

就是沿着这些主轴方向的相对伸长 $(\mathrm{d}x_i' - \mathrm{d}x_i)/\mathrm{d}x_i$.

实际上，几乎在物体所有的形变中，应变都是很小的. 这就是说，在物体内任何一段距离的改变量，与其距离本身相比，都是很小的. 换句话说，相对伸长

远远小于1. 以后，我们将认为所有的应变都是小量.

由此可见，如果物体处于小形变，则在物体内部，用来确定长度相对变化的应变张量的所有分量都是小量. 至于说到位移矢量，在某些情况下，即使应变分量很小，它也可能是比较大的. 例如，一个细长的杆，甚至在受到很大的弯曲时，它的两端在空间已经发生了明显的变位，而杆件内部的拉伸和压缩却是不大的.

除了这样的特殊情形外①，在小形变时，位移矢量同样也是小的. 实际上，任何"三维"的物体(即，在任何方向上的尺寸都不是特别小的物体)显然不可能发生这样的形变——物体的个别部分在空间发生很大的变位，而在物体内部却不产生强烈的拉伸或压缩.

关于细长杆的问题我们将在第二章单独研究. 就是说，在其它情形下，形变小时，其位移分量 u_i 连同它们关于坐标的导数也都是小的. 因此，在一般表达式(1.3)中，可以把最后一项作为二阶小量而略去. 这样一来，在小形变情形下，应变张量可以由如下表达式确定：

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{1.5}$$

现在，线元沿应变张量(在给定点)主轴方向的相对伸长(精确到高阶量)等于

$$\sqrt{1+2u^{(i)}}-1\approx u^{(i)},$$

亦即，直接等于张量 u_{ik} 的主值.

现在来考虑任一无限小的体元 $\mathrm{d}V$，并确定物体形变后体积的大小 $\mathrm{d}V'$. 为此，在所研究的点，选取应变张量的主轴作为坐标轴. 这样，沿着这些轴的线元 $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$，在形变后变为 $\mathrm{d}x_1'=(1+u^{(1)})\mathrm{d}x_1$，等等. 体积 $\mathrm{d}V$ 等于积 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$，而体积 $\mathrm{d}V'$ 等于积 $\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3'$. 于是有

$$\mathrm{d}V'=\mathrm{d}V(1+u^{(1)})(1+u^{(2)})(1+u^{(3)}).$$

由此，略去高阶小量，得

$$\mathrm{d}V'=\mathrm{d}V(1+u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}).$$

众所周知，张量主值之和 $u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}$ 是不变量，并等于在任何坐标系中的对角线分量之和：$u_{ii}=u_{11}+u_{22}+u_{33}$.

这样一来，即有

$$\mathrm{d}V'=\mathrm{d}V(1+u_{ii}). \tag{1.6}$$

由此可见，应变张量对角分量之和就是体积的相对变化：$(\mathrm{d}V'-\mathrm{d}V)/\mathrm{d}V$.

有时，应变张量的分量比较方便的不是利用笛卡儿坐标，而是利用球坐标或柱坐标. 在这里，为了便于查阅，我们相应的引入用位移矢量的分量在球坐标和

① 除了细长杆的形变外，属于这种情形的还有薄板的柱面弯曲. 同样应该例外的还有当"三维"物体除了形变外，整体还围绕某个轴旋转有限角度的情形.

柱坐标中的导数表示它们的公式.

在球坐标 r,θ,φ 中:

$$\begin{aligned}
&u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\ u_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r},\\
&u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\cot\theta+\frac{u_r}{r},\\
&2u_{\theta\varphi}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\cot\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi},\\
&2u_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta},\\
&2u_{\varphi r}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}.
\end{aligned}\tag{1.7}$$

在柱坐标 r,φ,z 中:

$$\begin{aligned}
&u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r},\quad u_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&2u_{\varphi z}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z},\ 2u_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r},\\
&2u_{r\varphi}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}.
\end{aligned}\tag{1.8}$$

§2 应力张量

在未形变的物体中,分子的分布适合于物体的热平衡状态. 这时,物体所有各部分彼此之间也都处于力学平衡. 这就意味着,如果在物体内部任意分离出一部分体积,那么从物体其余部分作用于该体积上的所有的力之合力等于零.

在物体形变时,分子的分布发生了变化,使物体离开了原来所处的平衡状态,从而产生了力图使物体恢复平衡状态的力. 这种在形变时出现的内力称为**应力**. 如果物体没有形变,那么在物体内部就没有应力.

应力是由物体分子之间彼此相互作用的分子力引起的. 对弹性理论而言,最为重要的事实,就是分子力具有极小的作用半径. 在产生分子力的质点周围,该分子力的影响只能扩展到与分子间距同样数量级的距离上. 而作为宏观的弹性理论,它只考虑远大于分子间距的距离. 因此,在弹性理论中可以认为分子力的"作用半径"等于零. 也可以说,在弹性理论中,引起应力的力只能是从某点传递给相邻点的"近程作用力",由此可以得出:物体内任何一部分,从包围它的那部分物体方面给它的作用力,只能直接通过物体该部分的表面来显现①.

---

① 超过接触表面的分子间的相互作用力,即所谓"远程作用力",根据柯西应力原理可以忽略. 这使计算大为简化,并为实验所证实. ——译者注

这里必须作如下的说明：如果在物体形变时伴随有宏大的电场出现，则前面的论断就不正确了. 这样的(所谓热电性或压电性)物体，详见第八卷.

我们在物体中切取任意一部分体积，并且研究作用在它上面的合力. 一方面，这个合力可以表示为体积分形式：

$$\int \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V,$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 是作用在物体单位体积上的力. 另一方面，在所研究体积内不同部分间相互作用的力不可能产生不为零的合力，因为根据牛顿第三定律(作用力与反作用力相等)，这些力在求和时彼此相互抵消. 因此可以认为，所求的作用在给定体积上的合力，仅仅是从围绕该体积的那部分物体对其作用力的总和. 但是，按照前面的说明，作用在所研究体积上的这些力是通过该体积的表面而作用的，因此，其合力可以表示为在该体积表面每个单元上作用力的总和，即表示为沿该体积表面的某个积分.

这样一来，对于物体任一部分体积，所有应力之合力 $\int F_i\,\mathrm{d}V$ 的每一个分量都可以化为沿该体积表面的积分. 由矢量分析可知，如果一个标量是某个矢量的散度，那么这个标量在任意体积上的体积分就可以化为沿着那个体积表面的面积分. 在这里的情形，所涉及的不是标量积分，而是矢量积分. 因此，矢量 F_i 必定是某个二阶张量的散度，即有①

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{2.1}$$

于是，作用在某体积上的力，可以写为沿包围该体积的闭合曲面上的一个积分②：

$$\int F_i\,\mathrm{d}V = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\mathrm{d}V = \oint \sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k. \tag{2.2}$$

张量 σ_{ik} 称为**应力张量**. 由式(2.2)可见，$\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$ 是作用于面元(面积单元) $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 上的力在第 i 个坐标轴方向的分量. 若在平面 xy, yz, zx 上选取面元，就会发现，应力张量之分量 σ_{ik} 是作用在垂直于 x_k 轴的单位面积上的力在第 i 个坐标轴方向的分量. 于是，在垂直于 x 轴的单位面积上，沿 x 轴方向作用的法线方向的力为 σ_{xx}(称为**法向应力或正应力**)，沿 y 轴和 z 轴方向作用的切线方向的力分别

---

① 严格说来，在确定作用于形变后物体体积上的合力进行积分时，不应该用原来的坐标 x_i，而应该用物体形变后的坐标 x_i'. 因此，式(2.1)也应该对 x_i' 取导数. 但是，由于小形变时，对 x_i 取导数与对 x_i' 取导数彼此之间的差别是高阶小量，所以，所有的求导全都是对坐标 x_i 进行的.

② 面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 的方向沿着所包围体积表面的外法线方向. 借助于用算子 $\mathrm{d}V\cdot\partial/\partial x_i$ 代换 $\mathrm{d}f_i$ 的方法可将按闭合曲面的积分化为体积分.

为 σ_{yx} 和 σ_{zx}（这两个力称为**切向应力或剪应力**）.

在这里，关于力 $\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$ 的符号问题必须作如下的说明：在式(2.2)中，沿曲面的积分所表示的是从物体其余部分作用在被该曲面包围的体积上的力；相反，从该体积作用于包围它的表面上的力则具有相反的符号. 因此，例如，从内部应力那方面作用于物体整个表面上的力为

$$-\oint\sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k\ ,$$

式中的积分是遍及物体表面的，而 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 指向外法线方向.

现在让我们来确定作用在物体某体积上的力矩. 众所周知，力 $\boldsymbol{F}$ 之矩，可以写为二阶反称张量形式，它的分量为 $F_ix_k - F_kx_i$，其中 x_i 是力作用点的坐标①. 因此，作用在体元 $\mathrm{d}V$ 上的力矩为 $(F_ix_k - F_kx_i)\mathrm{d}V$，而作用在整个体积上的力矩为

$$M_{ik} = \int(F_ix_k - F_kx_i)\,\mathrm{d}V.$$

像作用在任一体积上的合力一样，该合力矩也可以表示为沿体积表面的积分. 将表达式(2.1)中的 F_i 代入上式，得

$$M_{ik} = \int\left(\frac{\partial\sigma_{il}}{\partial x_l}x_k - \frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial x_l}x_i\right)\mathrm{d}V = \int\frac{\partial(\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)}{\partial x_l}\mathrm{d}V - \int\left(\sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl}\frac{\partial x_i}{\partial x_l}\right)\mathrm{d}V$$

我们注意到，在上式第二项中的导数 $\partial x_k/\partial x_l$ 构成一个单位张量 δ_{kl}，而在第一项里位于积分号后面的部分是某个张量的散度. 将该体积分化为面积分，最后得到：

$$M_{ik} = \oint(\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)\,\mathrm{d}f_l + \int(\sigma_{ki} - \sigma_{ik})\,\mathrm{d}V. \tag{2.3}$$

如果应力张量是对称的，即

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}\,, \tag{2.4}$$

则式(2.3)中的体积分就消失了（对于式(2.4)这个重要结果的论证，我们将在本节的最后再来研究）. 于是，张量 M_{ik} 将只表示为按表面进行积分的形式. 这时，作用在物体某部分体积上的力矩可以简单的表示为：

$$M_{ik} = \int(F_ix_k - F_kx_i)\,\mathrm{d}V = \oint(\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)\,\mathrm{d}f_l. \tag{2.5}$$

在物体受各向均匀压缩的情形下，很容易写出应力张量. 在这样压缩时，作用于物体表面每单位面积上压力的大小都是相同的，其方向处处与表面垂直并指向物体内部. 如果用字母 p 表示这个压力，则作用在面元 $\mathrm{d}f_i$ 上的力为 $-p\,\mathrm{d}f_i$. 另

---

① 力 $\boldsymbol{F}$ 之矩定义为矢量积 $\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r}$，两个矢量的矢量积是一个二阶反称张量，在本书中将该张量写为分量形式.

一方面，该力又可以通过应力张量表示为 $\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$. 把 $-p\mathrm{d}f_i$ 写为 $-p\delta_{ik}\mathrm{d}f_k$ 形式后，我们看到，当物体受到各向均匀压缩时，应力张量具有如下形式：

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}, \tag{2.6}$$

该张量所有不为零的分量，都等于这个简单的压力.

在任意形变的一般情况下，应力张量的非对角分量也不为零. 这就意味着，在物体内部每一个面元上作用的力，不仅有法向应力，还有切向应力. 切向应力力图使彼此相邻的面元作平行移动.

当平衡时，在物体的每个体元内部的应力必然相互抵消，即 $F_i=0$. 这样一来，形变物体的**平衡方程**将有如下形式：

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{2.7}$$

如果物体处在重力场中，则作用在物体每单位体积上的力（由内部应力形成的力）与重力 $\rho\boldsymbol{g}$ 之和，即 $\boldsymbol{F}+\rho\boldsymbol{g}$ 应等于零①，其中 ρ 是密度②，$\boldsymbol{g}$ 是物体自由下落时的加速度矢量，其方向竖直向下. 在这种情形下，平衡方程具有如下形式：

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+\rho g_i=0. \tag{2.8}$$

至于直接作用于物体表面上的外力（通常是引发形变的根源）将进入到平衡方程的边界条件中去. 设 $\boldsymbol{P}$ 为作用于物体表面单位面积上的外力，则作用于面元 $\mathrm{d}f$ 上的外力为 $\boldsymbol{P}\mathrm{d}f$. 在平衡时，它应与从物体内部的应力方面作用在同一个面元上的力 $-\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$ 相抵消. 这样一来，必有

$$P_i\mathrm{d}f-\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k=0.$$

把 $\mathrm{d}f_k$ 写为 $\mathrm{d}f_k=n_k\mathrm{d}f$ 的形式，其中 $\boldsymbol{n}$ 是表面外法线方向上的单位矢量，由此得到：

$$\sigma_{ik}n_k=P_i. \tag{2.9}$$

该式即是处于平衡的物体在全部表面上必须满足的条件（通常称为**边界条件**）.

现在，我们再来推导形变物体中表示应力张量平均值的公式. 为此，用 x_k 乘方程(2.7)，并按物体全部体积进行积分：

$$\int\frac{\partial\sigma_{il}}{\partial x_l}x_k\mathrm{d}V=\int\frac{\partial(\sigma_{il}x_k)}{\partial x_l}\mathrm{d}V-\int\sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l}\mathrm{d}V=0.$$

将上式右边第一个体积分化为遍及物体表面的面积分，在第二个积分里，注意到

---

① 注意，这里，式(2.7)以及后面一些地方，如式(40.6)，(44.9)，(45.1)等处，都提到单位体积上的力. 要区分两种情形，一种是由单位体积内的应力形成的力，一种是作为外力（如重力）作用在单位体积上的力，这后者就是弹性理论通常说的体积力（简称体力）.

——译者注

② 严格说来，当物体形变时它的密度是会改变的. 不过，在小形变情形下考虑这个改变，得到的是高阶小量. 因此，对我们来说是不重要的.

$\partial x_k/\partial x_l=\delta_{kl}$，由此可得：

$$\oint\sigma_{il}x_k\mathrm{d}f_l-\int\sigma_{ik}\,\mathrm{d}V=0.$$

将式(2.9)代入第一个积分中，得

$$\oint P_i x_k\mathrm{d}f=\int\sigma_{ik}\,\mathrm{d}V=V\overline{\sigma}_{ik}.$$

式中 V 是物体体积，$\overline{\sigma}_{ik}$ 是应力张量按全部体积的平均值. 利用关系式 $\sigma_{ik}=\sigma_{ki}$，可以将上式写为对称形式：

$$\overline{\sigma}_{ik}=\frac{1}{2V}\oint(P_i x_k+P_k x_i)\mathrm{d}f. \tag{2.10}$$

这样一来，应力张量的平均值就可以直接由作用于物体上的外力来确定，而无需先求解平衡方程.

现在我们返回到前面已经引用过的应力张量对称性的证明，因为它需要精确的表述. 如果张量 σ_{ik} 的反称部分（即式(2.3)中体积分内的被积函数表达式）不仅等于零，而且，它还是一个全散度，亦即，如果

$$\sigma_{ik}-\sigma_{ki}=2\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_{ikl},\ \varphi_{ikl}=-\varphi_{kil} \tag{2.11}$$

（式中 φ_{ikl} 是第一对指标为反称的任意张量），则提供的物理条件（把张量 M_{ik} 表示为只是个沿表面的积分）将被满足. 在这种情形下，最后这个张量可以通过导数 $\partial u_i/\partial x_k$ 表示，而在相应的应力张量中出现了位移矢量的高阶导数项. 在本书弹性理论的叙述范围内，所有这样的项都应视为高阶小量并弃之.

但是，本质上，从原则的观点来说，即使这些项不被忽略①，应力张量也可以导入对称形式. 事实上，按照式(2.1)确定的这个应力张量不是唯一的，即容许任何如下形式的变换：

$$\tilde{\sigma}_{ik}-\sigma_{ik}=\frac{\partial}{\partial x_l}\chi_{ikl},\quad \chi_{ikl}=-\chi_{ilk}. \tag{2.12}$$

式中 χ_{ikl} 是任意关于最后一对指标反称的张量. 很明显，导数 $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ 和 $\partial\tilde{\sigma}_{ik}/\partial x_k$ 都由力 $\boldsymbol{F}$ 确定，是恒等的. 如果张量 σ_{ik} 的反称部分具有式(2.11)的形式，则非对称张量 σ_{ik} 可以用这样的变换导出对称形式. 对称张量的形式为

$$\tilde{\sigma}_{ik}=\frac{1}{2}(\sigma_{ik}+\sigma_{ki})+\frac{\partial}{\partial x_l}(\varphi_{ilk}+\varphi_{kli}). \tag{2.13}$$

实际上，根据张量关系式

$$\chi_{ikl}=\chi_{kli}+\chi_{ilk}-\chi_{ikl} \tag{2.14}$$

很容易确信差 $\tilde{\sigma}_{ik}-\sigma_{ik}$ 具有式(2.12)的形式（P. C. Martin, O. Parodi, P. S. Pers-

① 按照微观理论的一般论述，可比较第二卷 §32.

han,1972).

§3 形变热力学

现在考虑任意一个形变的物体,并假定形变是这样变化的,即位移矢量 u_i 改变一个小量 δu_i. 我们来确定此时由物体的应力所作的功. 将力 $F_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ 乘以位移 δu_i,并沿物体整个体积进行积分,则有

$$\int\delta R\mathrm{d}V = \int\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\delta u_i\mathrm{d}V.$$

用记号 δR 表示在物体单位体积的应力所做的功. 利用分部积分求得

$$\int\delta R\mathrm{d}V = \oint\sigma_{ik}\delta u_i\mathrm{d}f_k - \int\sigma_{ik}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}V.$$

我们考虑在无穷远处不发生形变的无限介质. 将第一个积分的积分曲面引向无穷远处,则在该曲面上 $\sigma_{ik}=0$,因而积分消失. 利用张量 σ_{ik} 的对称性,第二个积分可以写为如下形式:

$$\int\delta R\mathrm{d}V = -\frac{1}{2}\int\sigma_{ik}\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\delta u_k}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\sigma_{ik}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V = -\int\sigma_{ik}\delta u_{ik}\mathrm{d}V.$$

于是,我们得到

$$\delta R = -\sigma_{ik}\delta u_{ik}. \tag{3.1}$$

这就是用应变张量的变化来确定功 δR 的公式.

如果物体的形变足够小,则在引起形变的外力停止作用后,物体将恢复到最初的未形变状态,这样的形变称为**弹性形变**. 在较大形变时,外力作用停止后并不能使形变完全消失,即如通常说的那样,保留了某些**残余形变**,因而物体的状态与受力作用以前不同,这样的形变称为**塑性形变**. 今后(除第四章外)我们将只研究弹性形变.

另外我们假定,形变过程完成得是如此的缓慢,以致使任何瞬间在物体内部都来得及建立与当时外部条件相应的热力学平衡状态(实际上,这个条件几乎总是能够满足的). 于是,这个过程就是热力学的可逆过程了.

我们约定,今后所有这样的热力学量,如**熵** S,**内能** ε 等等,都是指对于物体单位体积(而不像流体力学那样是对于单位质量)的,并用相应的大写字母表示.

因此,我们必须作如下说明:严格地说,必须区分形变前与形变后的单位体积,一般来说这两个体积包含有不同数量的物质,今后各处(除第六章外),所有的热力学量都是指对于未形变物体单位体积的,亦即在单位体积内所包含物质

的数量,在形变后可能占有某个与最初体积不相同的体积. 因此,例如物体的全部能量往往是按物体未形变的体积对 ε 进行积分得到的.

内能无限小的变化 $d\varepsilon$,等于物体内所给单位体积得到的热量与应力所做的功 dR 之差. 在可逆过程中,热量等于 $T\,dS$,这里 T 表示温度. 因而 $d\varepsilon = T\,dS - dR$. 由式(3.1)引入 dR,我们得到

$$d\varepsilon = T\,dS + \sigma_{ik}du_{ik}. \tag{3.2}$$

这就是对于形变物体的基本热力学关系式.

在各向均匀压缩时,由式(2.6)可知,应力张量 $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$. 在这种情形下,有

$$\sigma_{ik}du_{ik} = -p\delta_{ik}du_{ik} = -p\,du_{ii}.$$

但是,我们已经看到(见式(1.6)),求和公式 u_{ii} 表示形变时体积的相对变化. 如果研究的是单位体积,则 u_{ii} 自然是这个单位体积的变化. 而 du_{ii} 就是这个体积变化的体元 dV. 这时,热力学关系式即变为通常的形式:

$$d\varepsilon = TdS - pdV. \tag{3.2a}$$

若用物体的**自由能** $F = \varepsilon - TS$ 代换内能 ε,则关系式(3.2)即可改写为

$$dF = -SdT + \sigma_{ik}du_{ik}. \tag{3.3}$$

最后,把物体的**热力学势** Φ 定义为

$$\Phi = \varepsilon - TS - \sigma_{ik}u_{ik} = F - \sigma_{ik}u_{ik}. \tag{3.4}$$

该式即是通常表达式 $\Phi = \varepsilon - TS + pV$① 的推广. 将式(3.4)代入(3.3)得

$$d\Phi = -SdT - u_{ik}d\sigma_{ik}. \tag{3.5}$$

式(3.2)和(3.3)中的独立变量分别是 S, u_{ik} 和 T, u_{ik}. 应力张量的分量,可以分别在熵 S 或温度 T 不变的情况下由 ε 或 F 对应变张量的分量取导数得到:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_{ik}}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T. \tag{3.6}$$

类似的,将势 Φ 对应力分量 σ_{ik} 取导数,即得形变分量 u_{ik}:

$$u_{ik} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ik}}\right)_T. \tag{3.7}$$

§4　胡克定律

为了使普遍的热力学关系有可能应用于任何形变的具体情形中,就必须把

---

① 在受到各向均匀压缩时,表达式(3.4)变为

$$\Phi = F + pu_{ii} = F + p(V - V_0),$$

式中 $V - V_0$ 为由形变引起的体积变化. 由此可见,我们这里所采用的 Φ 的定义与通常热力学所采用的定义 $\Phi = F + pV$ 的区别只是多了 $-pV_0$ 这一项.

物体的自由能表达式 F 作为应变张量的函数. 利用小形变并适当地把自由能展开为 u_{ik} 的幂级数,就很容易得到上述的表达式. 在这里,我们暂且只研究各向同性物体,关于晶体的相应表达式,将在后面的 §10 中给出.

现在考虑处于某一(沿物体不变)温度下的形变物体,我们认为:在同一温度下(这个限制的必要性,是因为热膨胀. 详见 §6),当不存在外力时,物体处于未形变状态. 这时,当 $u_{ik}=0$ 时,同样应力也不应该存在,即必须有 $\sigma_{ik}=0$. 因为 $\sigma_{ik}=\partial F/\partial u_{ik}$,所以,在将 F 按 u_{ik} 的幂级数展开时,应没有线性项.

其次,因为自由能是标量,所以在 F 展开式中的每一项也必须是标量. 由对称张量的分量 u_{ik} 能够组成两个独立的二次幂标量. 可以选取对角分量的平方和 u_{ii}^2 以及张量所有分量 u_{ik} 的平方和 u_{ik}^2 作为这两个标量. 因此,将 F 展开为 u_{ik} 的幂级数时,我们就得到精确到二次项的表达式:

$$F=F_0+\frac{\lambda}{2}u_{ii}^2+\mu u_{ik}^2. \tag{4.1}$$

这就是形变后各向同性物体自由能的一般表达式. 其中 λ 和 μ 称为**拉梅常量**.

在 §1 中我们已经看到,物体形变时体积的变化由和式 u_{ii} 确定. 如果这个和式等于零,那就是说,在形变时物体体积保持不变,而改变的只是它的形状. 这种不改变体积的形变称为**纯剪形变**.

相反的情况是改变体积而不改变形状的形变. 在这种形变时,物体的每一个体元都保持原来的形状. 由 §1 得知,这样形变的应变张量都具有 $u_{ik}=\text{const}\cdot\delta_{ik}$ 的形式,称为**各向均匀压缩**.

任何形变都可以表示为纯剪形变和各向均匀压缩形变之和,为此,只需写出恒等式:

$$u_{ik}=\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)+\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}. \tag{4.2}$$

显然,右边第一项是纯剪形变,因为它的对角线项之和等于零(注意,$\delta_{ii}=3$),而第二项与各向均匀压缩形变有关.

作为各向同性物体形变自由能的一般表达式,有时写为另外一种形式来代替式(4.1)更为方便,这就是将任意形变分解为上面所说的纯剪形变和各向均匀压缩形变,即选取相当于式(4.2)中的第一项和第二项组成的平方和,作为式(4.1)中两个独立二次幂的标量. 这样,F 将具有如下形式①:

$$F=\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)^2+\frac{K}{2}u_{ll}^2. \tag{4.3}$$

---

① 常数项 F_0 为物体未形变时的自由能,以后对我们不感兴趣. 因此,为了简便起见,我们总是省略它. 这就是说在 F 里面只有一个对我们感兴趣的形变自由能,就是通常所说的**弹性自由能**.

其中 K 和 μ 分别称为**各向均匀压缩模量**（或**体积模量**）和**剪切模量**. K 与拉梅常量的关系为

$$K=\lambda+\frac{2}{3}\mu. \tag{4.4}$$

众所周知，在热力学的平衡状态中，自由能取极小值. 如果在物体上没有作用任何外力，F 作为 u_{ik} 的函数，在 $u_{ik}=0$ 时，应取极小值. 这就意味着，二次型公式(4.3)必然为正. 如果选取张量 u_{ik} 使 $u_{ll}=0$，则式(4.3)中只剩下了第一项；如果选取张量为 $u_{ik}=\text{const}\cdot\delta_{ik}$ 形式，则式(4.3)中只剩下了第二项. 由此得出，系数 K 和 μ 的每一个都为正数，是公式(4.3)为正的必要条件（显然，也是充分条件）.

这样一来，我们就得到体积模量和剪切模量永远为正数的结果，即

$$K>0,\quad \mu>0 \tag{4.5}$$

现在，利用热力学一般关系式(3.6)，并借以确定应力张量. 为了计算导数 $\partial F/\partial u_{ik}$，我们写出全微分 $\mathrm{d}F$（在恒温下），有

$$\mathrm{d}F=Ku_{ll}\mathrm{d}u_{ll}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)\mathrm{d}\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right).$$

在第二项中，用 δ_{ik} 乘第一个括号即得零，因此，剩下的是

$$\mathrm{d}F=Ku_{ll}\mathrm{d}u_{ll}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)\mathrm{d}u_{ik}.$$

或者，把 $\mathrm{d}u_{ll}$ 写为 $\delta_{ik}\mathrm{d}u_{ik}$ 的形式，则有

$$\mathrm{d}F=\left[Ku_{ll}\delta_{ik}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)\right]\mathrm{d}u_{ik}.$$

由此，对于应力张量，有

$$\sigma_{ik}=Ku_{ll}\delta_{ik}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right). \tag{4.6}$$

该式就是对于各向同性物体通过应变张量确定应力张量的表达式. 由上式可见，如果形变是纯剪或纯各向均匀压缩，则 σ_{ik} 和 u_{ik} 之间的关系仅由一个剪切模量或一个体积模量确定.

不难求得相反的公式，即用 σ_{ik} 表示 u_{ik} 的关系式. 为此，我们求出对角线项之和 σ_{ii}. 因为对于式(4.6)的第二项这个和化为零，所以 $\sigma_{ii}=3Ku_{ii}$，或

$$u_{ii}=\frac{1}{3K}\sigma_{ii}. \tag{4.7}$$

将该式代入式(4.6)，并由此确定 u_{ik}，得

$$u_{ik}=\frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll}+\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right), \tag{4.8}$$

依此式即可由应力张量求出应变张量.

等式(4.7)指出,在各向同性物体的任何形变中,体积的相对变化 u_{ii} 仅仅依赖于应力张量对角分量之和 σ_{ii},并且 u_{ii} 和 σ_{ii} 两者之间的关系仅取决于体积模量. 在物体各向(均匀)压缩时,应力张量具有 $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ 形式,所以在这种情况下,由式(4.7)有

$$u_{ii} = -\frac{p}{K}. \tag{4.9}$$

因为小形变,u_{ii} 和 p 都是小量,故而可以把体积相对变化与压力的比 u_{ii}/p 写为微分形式,于是

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T,$$

式中的 $1/K$ 称为**各向均匀压缩率**(简称**压缩率**或**压缩系数**).

由式(4.8)可见,应变张量 u_{ik} 是应力张量 σ_{ik} 的线性函数. 换句话说,形变与施加于物体上的力成正比. 这个对于小形变存在的定律称为**胡克定律**①.

我们再引入一个形变物体自由能表达式的有用公式,这可由 F 是应变张量的二次型而直接获得. 根据欧拉定理,有

$$u_{ik}\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = 2F.$$

由此可见,$\partial F/\partial u_{ik} = \sigma_{ik}$,故

$$F = \frac{\sigma_{ik}u_{ik}}{2}. \tag{4.10}$$

如果在这个公式中,将 u_{ik} 代以分量 σ_{ik} 的线性组合表达式,则弹性能即可表示为 σ_{ik} 的二次函数. 再次应用欧拉定理,即得

$$\sigma_{ik}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = 2F.$$

将该式与(4.10)比较可得

$$u_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}}. \tag{4.11}$$

但是必须强调指出,公式 $\sigma_{ik} = \partial F/\partial u_{ik}$ 是热力学的一般关系式,而反表示的公式(4.11),其正确性与满足胡克定律有关.

§5 均匀形变

让我们来研究几个最简单的**均匀形变**,即沿物体整个体积的应变张量都是

---

① 事实上,胡克定律适用于一切弹性形变. 问题在于,当形变小到这种程度,以致胡克定律还有足够好的近似时,形变本身通常已经不再属于弹性形变了(橡皮类型的物体除外).

常量的形变[1]. 作为均匀形变的例子,如我们已经研究过的各向均匀压缩便是.

现在来研究杆的所谓**简单拉伸**(或**压缩**). 设杆沿 z 轴放置,在两端施加方向相反的拉力,均匀的作用于杆件的端表面上,设 p 为单位表面上作用的力.

因为是均匀形变,即 u_{ik} 沿着整个物体是不变的,故应力张量 σ_{ik} 同样也是不变的. 所以 σ_{ik} 可以直接由边界条件(2.9)确定. 在杆的侧表面上不存在外力,因而 $\sigma_{ik}n_k=0$. 由于在侧表面上单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于 z 轴,即只有分量 n_x,n_y,故由此可以得出:在 σ_{ik} 的所有分量中,除了 σ_{zz} 之外,其余的全部等于零. 在杆的端表面上,$\sigma_{zi}n_i=p$,所以 $\sigma_{zz}=p$.

由联系应变张量和应力张量的一般表达式(4.8)可知,张量 u_{ik} 中,所有 $i\neq k$ 的分量都等于零. 对于其余的分量,可求得

$$u_{xx}=u_{yy}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu}-\frac{1}{3K}\right)p,\quad u_{zz}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K}+\frac{1}{\mu}\right)p. \tag{5.1}$$

分量 u_{zz} 确定杆沿着 z 轴的相对伸长. 在 p 前边的系数称为**拉伸系数**,而它的倒数称为**拉伸模量**(或**杨氏模量**),记为 E,于是有

$$u_{zz}=\frac{p}{E}. \tag{5.2}$$

式中

$$E=\frac{9K\mu}{3K+\mu}. \tag{5.3}$$

由分量 u_{xx} 和 u_{yy} 确定杆的横向相对压缩. 而横向压缩与纵向拉伸的比称为**泊松系数**(或**泊松比**),记为 σ[2],于是有

$$u_{xx}=-\sigma u_{zz}, \tag{5.4}$$

式中

$$\sigma=\frac{1}{2}\frac{3K-2\mu}{3K+\mu}. \tag{5.5}$$

因为 K 与 μ 总是正的,故对于不同的材料,泊松比只能在 -1(在 $K=0$ 时)到 $1/2$(在 $\mu=0$ 时)之间变化[3]. 于是

---

[1] 因为通过总共 3 个独立函数(即矢量 $\boldsymbol{u}$ 的 3 个分量)的导数来表示张量 u_{ik} 的 6 个不同分量(见 §7 习题 9),所以作为坐标函数的应变张量的分量不全是独立的量. 但是,原则上能够用任意方式给出 u_{ik} 的 6 个固定的量.

[2] 用 σ 表示泊松系数,而用 σ_{ik} 表示应力张量的分量,这不会引起误解,因为与前面的泊松系数不同,后面的应力张量符号总是带有指标的.

[3] 事实上,泊松系数只是在 0 到 1/2 的范围内变化,这是因为,直到现在为止,还未发现 $\sigma<0$,亦即在纵向拉伸时变厚了的物体. 我们同样指出,不等式 $\sigma>0$ 与 $\lambda>0$ 是符合的. 换句话说,这两项的值不仅在表达式(4.3)中总是正的,在式(4.1)中,也总是正的,虽然这并不是热力学要求的. σ 的值接近于 1/2(例如橡皮)符合于剪切模量远小于压缩模量的情形.

$$-1 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}. \tag{5.6}$$

最后，在杆件拉伸时，其体积的相对增加等于

$$u_{ll} = \frac{p}{K}. \tag{5.7}$$

利用公式(4.10)可以直接写出拉伸杆的自由能，因为不为零的分量只有 σ_{zz}，故

$$F = \frac{1}{2} u_{zz} \sigma_{zz} = \frac{p^2}{2E}. \tag{5.8}$$

以后，我们通常用 E 和 σ 代替模量 K 和 μ，而第二个拉梅常量 λ 同样可以通过 E 和 σ 表示，这些公式为

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}. \tag{5.9}$$

在这里，我们用系数 E 和 σ 表示上一节写出的几个一般公式. 自由能公式：

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll}^2 \right). \tag{5.10}$$

用应变张量表示应力张量的公式：

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right). \tag{5.11}$$

相反的公式：

$$u_{ik} = \frac{1}{E}[(1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma \sigma_{ll} \delta_{ik}]. \tag{5.12}$$

由于公式(5.11)和(5.12)经常要用到，这里为方便起见，把它们用分量形式写出如下：

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{xx} + \sigma(u_{yy} + u_{zz})],$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{yy} + \sigma(u_{xx} + u_{zz})],$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx} + u_{yy})],$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\sigma} u_{xy}, \quad \sigma_{xz} = \frac{E}{1+\sigma} u_{xz}, \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{1+\sigma} u_{yz}. \tag{5.13}$$

而相反的公式：

$$u_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \sigma(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})],$$

$$u_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})],$$

$$u_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})],$$

$$u_{xy}=\frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xy},\quad u_{xz}=\frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xz},\quad u_{yz}=\frac{1+\sigma}{E}\sigma_{yz}. \tag{5.14}$$

现在我们来研究杆的压缩. 假设杆的侧面是固定的,以致它的横截面尺寸不能改变. 使杆件产生压缩的外力,是加于杆的两端并沿其长度方向作用的力. 这里,我们仍然选取长度方向作为 z 轴. 这样的形变称为**单向压缩**. 由于杆件只能沿其 z 轴形变,故而在 u_{ik} 的所有分量中,不为零的分量只有 u_{zz}. 由式(5.13),现在我们有

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz},\quad \sigma_{zz}=\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz}.$$

仍然用 p 表示压缩力($\sigma_{zz}=p$,在压缩时 p 取负值),则有

$$u_{zz}=\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}p. \tag{5.15}$$

在 p 前面的系数称为**单向压缩系数**. 而横向应力为

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=p\frac{\sigma}{1-\sigma}. \tag{5.16}$$

最后,杆的自由能为

$$F=p^2\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{2E(1-\sigma)}. \tag{5.17}$$

§6　有温度变化的形变

现在来研究伴随物体有温度变化而发生的形变,温度发生变化可能是由于形变过程本身,也可能是外部原因.

我们将物体在没有外力作用并给定某温度 T_0 时的状态作为未形变状态. 如果物体处于与 T_0 不同的温度 T,一般来说,即便是没有外力作用,物体也将因存在热膨胀而发生形变. 因为在自由能 $F(T)$ 的展开式中,不仅包含应变张量的平方项,还有其线性项. 由二阶张量的分量 u_{ik} 总共只能组成一个线性标量,即它的对角分量之和 u_{ii}. 其次我们假定,伴随形变发生的温度变化 $T-T_0$ 很小. 因此可以认为,在 F 的展开式中,u_{ii} 前面的系数与温差 $T-T_0$ 成正比(当 $T=T_0$ 时,该项为零). 这就意味着,对于自由能可以得到下面的公式(代替式(4.3)):

$$F(T)=F_0(T)-K\alpha(T-T_0)u_{ll}+\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)^2+\frac{K}{2}u_{ll}^2. \tag{6.1}$$

式中已将 $T-T_0$ 前面的系数写成了 $-K\alpha$ 的形式. 在这里,应认为 μ,K,α 是常量. 如果考虑它们依赖于温度的关系,则将引进高阶小量.

将 F 对 u_{ik} 求导,即得到应力张量,我们有

$$\sigma_{ik}=-K\alpha(T-T_0)\delta_{ik}+Ku_{ll}\delta_{ik}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right). \tag{6.2}$$

这里的第一项是与物体温度变化有关的附加应力，当物体自由热膨胀时（在没有外力情形下），应该没有内应力. 置 $\sigma_{ik}=0$，即求出 u_{ik}，它具有 $\text{const}\cdot\delta_{ik}$ 形式，并且

$$u_{ll}=\alpha(T-T_0). \tag{6.3}$$

但 u_{ll} 是形变时体积的相对变化，因此 α 不是别的，正是物体的**热膨胀系数**.

在各种（热力学意义上的）不同类型的形变中，最重要的是**等温形变**和**绝热形变**. 在等温形变时，物体的温度是不变化的. 据此，在式(6.1)中，应置 $T=T_0$，即回到了通常的公式. 系数 K 和 μ 也因此称为**等温模量**.

在绝热形变时，物体不同部分之间，当然还有物体跟周围介质之间，都不发生热交换，这时，熵 S 仍然是常量. 众所周知，熵等于自由能对温度的导数 $-\partial F/\partial T$. 对式(6.1)求导，即得精确到 u_{ik} 的一阶精度的关系式：

$$S(T)=S_0(T)+K\alpha u_{ll}. \tag{6.4}$$

令该式等于常量，便可以确定形变时温度的变化，它与 u_{ll} 成正比：

$$\frac{C_v}{T_0}(T-T_0)=-K\alpha u_{ll}. \tag{6.5}$$

将该表达式代入式(6.2)，即得到 σ_{ik} 通常形式的表达式：

$$\sigma_{ik}=K_{ad}u_{ll}\delta_{ik}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right). \tag{6.6}$$

该式同样带有剪切模量，但还带有另外一个模量 K_{ad}，即绝热体积模量. 绝热模量 K_{ad} 与通常的等温模量 K 的关系可以直接通过如下的一般热力学公式求出：

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S=\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T+\frac{T}{C_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2.$$

式中 C_p 是在压力不变时相对于物体单位体积的热容量. 如果把 V 理解为形变前物体单位体积包含的材料所占有的体积，则导数 $\partial V/\partial T$ 和 $\partial V/\partial p$ 分别给出加热时与压缩时体积的相对变化. 换句话说

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\alpha,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S=-\frac{1}{K_{ad}},\quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T=-\frac{1}{K}.$$

这样一来，就得到了绝热模量和等温模量之间的关系①：

$$\frac{1}{K_{ad}}=\frac{1}{K}-\frac{T\alpha^2}{C_p},\quad \mu_{ad}=\mu. \tag{6.7}$$

对于绝热拉伸模量和绝热泊松系数很容易求出如下关系：

---

① 为了从式(6.5)，(6.6)中得到这些公式，还必须利用熟知的热力学公式 $C_p-C_v=T\alpha^2K$.

$$E_{ad}=\frac{E}{1-ET\alpha^2/(9C_p)},\quad \sigma_{ad}=\frac{\sigma+ET\alpha^2/(9C_p)}{1-ET\alpha^2/(9C_p)}. \tag{6.8}$$

实际上,值 $ET\alpha^2/C_p$ 通常是很小的,因此可以足够精确地写为:

$$E_{ad}=E+E^2\frac{T\alpha^2}{9C_p},\quad \sigma_{ad}=\sigma+(1+\sigma)E\frac{T\alpha^2}{9C_p}. \tag{6.9}$$

在等温形变时,应力张量表示为自由能的导数形式:

$$\sigma_{ik}=\left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T.$$

在熵是常量时,应该写为(见式(3.6)):

$$\sigma_{ik}=\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_{ik}}\right)_S,$$

式中 ε 是内能. 因此,在绝热形变时,类似于(4.3)的表达式,确定的不是自由能,而只是普通的物体单位体积的内能:

$$\varepsilon=\frac{K_{ad}}{2}u_{ll}^2+\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)^2. \tag{6.10}$$

§7　各向同性物体的平衡方程

现在来推导各向同性固体的平衡方程. 为此,必须将应力张量表达式(5.11)代入一般方程(2.8):

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}+\rho g_i=0.$$

我们有

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}=\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial \sigma_{ll}}{\partial x_i}+\frac{E}{1+\sigma}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k},$$

再将 $u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ 代入上式,即得到如下形式的平衡方程:

$$\frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}+\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_l}+\rho g_i=0. \tag{7.1}$$

这些方程,可以很方便地改写为矢量形式. 在这些符号中,$\partial^2 u_i/\partial x_k^2$ 是矢量 $\nabla^2\boldsymbol{u}$ 的分量,而 $\partial u_l/\partial x_l\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{u}$. 这样一来,平衡方程即可表示为

$$\nabla^2\boldsymbol{u}+\frac{1}{1-2\sigma}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}=-\rho\boldsymbol{g}\frac{2(1+\sigma)}{E}. \tag{7.2}$$

有时将这个方程写为某种其它形式更为方便,利用熟知的矢量分析公式

$$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\nabla^2\boldsymbol{u}+\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u},$$

则式(7.2)具有如下形式:

$$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}-\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}=-\rho\boldsymbol{g}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}. \tag{7.3}$$

我们写出在均匀重力场中的平衡方程,是考虑到在弹性理论中,重力是最常见的**体积力**(简称**体力**). 在任意体力的情况下,方程式右边的矢量 $\rho\boldsymbol{g}$ 可以用其它相应的体力密度代替.

最重要的情形,形变不是由体力引起的,而是由附加于物体表面上的力而引起的. 这时,平衡方程记为

$$(1-2\sigma)\nabla^2\boldsymbol{u}+\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \tag{7.4}$$

另一种形式,为

$$2(1-\sigma)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}-(1-2\sigma)\ \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}=0. \tag{7.5}$$

外力只能通过边界条件的方式而进入解中.

对于方程(7.4)应用散度算子,并记住 $\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$,则得

$$\nabla^2\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \tag{7.6}$$

即 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$(形变时确定体积变化的量)是调和函数. 对方程(7.4)应用拉普拉斯算子 ∇^2,即得到

$$\nabla^2\ \nabla^2\boldsymbol{u}=0, \tag{7.7}$$

亦即在平衡时,位移矢量满足重调和方程. 这个结果在均匀重力场时有效(因为在进行微分运算时,方程(7.2)的右端项消失). 但是,在体力沿物体变化的一般情形下,这些结果就不正确了.

位移矢量满足重调和方程这一事实,并不意味着平衡方程(在没有体积力时)的一般积分是任意重调和矢量的函数. 必须记住,函数 $\boldsymbol{u}(x,y,z)$ 实际上还必须满足更低阶的微分方程(7.4). 同时,平衡方程的一般积分可以通过任意重调和矢量的导数表示(见习题 10).

如果物体非均匀加热,则在平衡方程中必须增加附加项,在应力张量中必须考虑 $-K\alpha(T-T_0)\delta_{ik}$ 项(见式(6.2)). 而在 $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ 中相应的出现下面一项:

$$-K\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i}=-\frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)}\frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

最后得到如下形式的平衡方程:

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}-\frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}=\alpha\ \nabla\ T. \tag{7.8}$$

现在来谈谈**平面形变**的特殊情形. 在这种情形下,在整个物体内,位移矢量的一个分量等于零($u_z=0$),而 u_x,u_y 仅仅与 x,y 有关. 这时,应变张量的分量 u_{zz},u_{xz},u_{yz} 恒等于零,应力张量的分量 σ_{xz},σ_{yz} 也同时为零(但是,纵向应力 σ_{zz} 不为零,它的存在能够保证物体沿 z 轴方向的长度不变).

因为所有的量都与坐标 z 无关，所以平衡方程（无体力时）$\partial\sigma_{ik}/\partial x_k=0$，在现在的情形下，归结为如下两个方程：

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=0. \tag{7.9}$$

能满足上述这些方程的函数 $\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yy}$ 的最一般形式是

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2},\quad \sigma_{xy}=-\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y},\quad \sigma_{yy}=\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}, \tag{7.10}$$

式中的 χ 是 x,y 的任意函数. 不难求出这个函数所应该满足的方程，这样的方程是肯定存在的，因为实际上这三个量 $\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yy}$，总可以通过两个量 u_x,u_y 来表示，因此这三个量并不是相互独立的. 借助于公式(5.13)，对于平面形变我们求得

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}(u_{xx}+u_{yy}).$$

但是

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=\nabla^2\chi,\quad u_{xx}+u_{yy}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{u},$$

而根据公式(7.6)，$\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ 是个调和函数，我们就可以断定，函数 χ 满足如下方程：

$$\nabla^2\nabla^2\chi=0, \tag{7.11}$$

亦即 χ 是个重调和函数. 函数 χ 称为**应力函数**. 在求解平面问题并找到函数 χ 之后，纵向应力 σ_{zz} 即可直接按如下公式求出：

$$\sigma_{zz}=\frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}(u_{xx}+u_{yy})=\sigma(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}),$$

或

$$\sigma_{zz}=\sigma\nabla^2\chi. \tag{7.12}$$

习　题

习题 1　试确定重力场中竖直放置的长杆（长度 l）的形变.

解：取 z 轴沿杆轴的方向，而 xy 平面置于杆下端的基础平面上. 平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_{xi}}{\partial x_i}=\frac{\partial\sigma_{yi}}{\partial x_i}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{zi}}{\partial x_i}=\rho g.$$

在杆的侧表面上，除 σ_{zz} 外，σ_{ik} 的所有分量都变为零，而在上端($z=l$)，$\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=\sigma_{zz}=0$. 使这些条件满足后，即得到平衡方程的解：

$$\sigma_{zz}=-\rho g(l-z),$$

而其余的所有分量：$\sigma_{ik}=0$. 由 σ_{ik} 确定 u_{ik} 的公式：

$$u_{xx}=u_{yy}=\frac{\sigma}{E}\rho g(l-z),\quad u_{zz}=-\frac{\rho g(l-z)}{E},\quad u_{xy}=u_{xz}=u_{yz}=0.$$

由此积分便得到位移矢量的分量：

$$u_x=\frac{\sigma}{E}\rho g(l-z)x,$$

$$u_y=\frac{\sigma}{E}\rho g(l-z)y,$$

$$u_z=-\frac{\rho g}{2E}\{l^2-(l-z)^2-\sigma(x^2+y^2)\}.$$

u_z 的表达式仅仅在杆件下表面的一个点上满足 $u_z=0$ 的边界条件. 因此，所得到的解在杆件下端面附近是不适用的.

习题 2 试确定空心球（内和外半径分别为 R_1 和 R_2）的形变，在球的内部作用压力 p_1，在球的外面作用压力 p_2.

解：引入球坐标，原点取在球心. 各处 $\boldsymbol{u}$ 的方向都是沿着半径的，而且只是 r 的函数. 因此，$\nabla\times\boldsymbol{u}=0$，而方程(7.5)化为

$$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0.$$

于是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2u)}{r}=\text{const}\equiv 3a,$$

或

$$u=ar+\frac{b}{r^2}.$$

应变张量的分量（见式(1.7)）：

$$u_{rr}=a-\frac{2b}{r^3},\quad u_{\theta\theta}=u_{\varphi\varphi}=a+\frac{b}{r^3}.$$

径向应力：

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{rr}+2\sigma u_{\theta\theta}]=\frac{E}{1-2\sigma}a-\frac{2E}{1+\sigma}\frac{b}{r^3}.$$

常数 a 和 b 由边界条件确定. 边界条件：当 $r=R_1$ 时，$\sigma_{rr}=-p_1$；当 $r=R_2$ 时，$\sigma_{rr}=-p_2$. 由此得到

$$a=\frac{p_1R_1^3-p_2R_2^3}{R_2^3-R_1^3}\frac{1-2\sigma}{E},\quad b=\frac{R_1^3R_2^3(p_1-p_2)}{R_2^3-R_1^3}\frac{1+\sigma}{2E}.$$

如在球的内部作用压力 $p_1=p$，而在外部 $p_2=0$ 时，沿着球厚度的应力分布由如下公式给出：

$$\sigma_{rr}=\frac{pR_1^3}{R_2^3-R_1^3}\left(1-\frac{R_2^3}{r^3}\right),\quad \sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{pR_1^3}{R_2^3-R_1^3}\left(1+\frac{R_2^3}{2r^3}\right).$$

对于厚度 $h=R_2-R_1<<R$ 的薄球壳，则有近似公式：

$$u=\frac{pR^2(1-\sigma)}{2Eh},\quad \sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{pR}{2h},\quad \bar{\sigma}_{rr}=\frac{p}{2}$$

($\bar{\sigma}_{rr}$为径向应力沿薄壳厚度上的平均值).

对于具有球腔(半径为 R)的无限弹性介质，在承受各向均匀压缩时的应力分布，可置 $R_1=R, R_2=\infty, p_1=0, p_2=p$ 得出：

$$\sigma_{rr}=-p\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right),\quad \sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi}=-p\left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right).$$

在球腔的边界上，与球腔相切方向的正应力 $\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi}=-3p/2$，即已超出无限远处的压力.

习题 3 试确定实心球(半径 R)在自身引力场作用下的形变.

解：在球体单位质量上作用的引力等于 $-\boldsymbol{g}\boldsymbol{r}/R$，将该式代入方程(7.3)，替换式中的 $\boldsymbol{g}$，即得如下的径向位移方程：

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2u)}{\mathrm{d}r}\right)=\rho g\frac{r}{R}.$$

利用在 $r=0$ 时解的有限性，并满足 $r=R$ 时 $\sigma_{rr}=0$ 的条件，求得的解为

$$u=-\frac{g\rho R(1-2\sigma)(1+\sigma)}{10E(1-\sigma)}r\left[\frac{3-\sigma}{1+\sigma}-\frac{r^2}{R^2}\right].$$

注意，在半径为 $R[(3-\sigma)/3(1+\sigma)]^{1/2}$ 的球面的里边，材料是受压缩的($u_{rr}<0$)，而在该球面的外边，材料是受拉伸的($u_{rr}>0$). 在球心的压力等于：

$$\frac{3-\sigma}{10(1-\sigma)}g\rho R.$$

习题 4 试确定空心圆柱形管的形变(内外半径分别为 R_1 和 R_2)，在管的内部作用压力 p，管的外部没有压力作用①.

解：引入柱坐标，取圆柱形管的中心轴为 z 轴. 当沿着圆柱形管施加均匀压力时，形变是单纯的径向位移 $u_r=u(r)$. 类似于习题 2，现在是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(ru)}{r}=\text{const}\equiv 2a.$$

由此

$$u=ar+\frac{b}{r}.$$

应变张量不为零的分量(见式(1.8))有

$$u_{rr}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=a-\frac{b}{r^2},\quad u_{\varphi\varphi}=\frac{u}{r}=a+\frac{b}{r^2}.$$

---

① 在习题 4,5,7 中，都是假设圆柱体保持固定长度，因此不存在纵向形变.

由 $r=R_2$ 时 $\sigma_{rr}=0$ 和 $r=R_1$ 时 $\sigma_{rr}=-p$ 的条件求得

$$a=\frac{pR_1^2}{R_2^2-R_1^2}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E},\quad b=\frac{pR_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\frac{1+\sigma}{E}.$$

沿圆柱形管壁厚度的应力分布，得出如下公式：

$$\sigma_{rr}=\frac{pR_1^2}{R_2^2-R_1^2}\left(1-\frac{R_2^2}{r^2}\right),\quad \sigma_{\varphi\varphi}=\frac{pR_1^2}{R_2^2-R_1^2}\left(1+\frac{R_2^2}{r^2}\right),$$

$$\sigma_{zz}=2\sigma\frac{pR_1^2}{R_2^2-R_1^2}.$$

习题 5 试确定环绕自身轴匀速旋转的圆柱体的形变.

解：以离心力 $\rho\Omega^2 r$（Ω 为角速度）代替重力写入式(7.3)中，则得到在圆柱坐标系中位移 $u_r=u(r)$ 的方程：

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(ru)}{\mathrm{d}r}\right)=-\rho\Omega^2 r.$$

利用在 $r=0$ 时解的有限性，并满足 $r=R$ 时 $\sigma_{rr}=0$ 的条件，得到解：

$$u=\frac{\rho\Omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)}r[(3-2\sigma)R^2-r^2].$$

习题 6 试确定非均匀加热的球体温度按球对称分布时的形变.

解：在球坐标中，单纯径向形变时，方程(7.8)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2u)}{\mathrm{d}r}\right)=\alpha\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}.$$

利用在 $r=0$ 时解的有限性，并满足 $r=R$ 时 $\sigma_{rr}=0$ 的条件即可得到解：

$$u=\alpha\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\left\{\frac{1}{r^2}\int_0^r T(r)r^2\mathrm{d}r+\frac{2(1-2\sigma)}{1+\sigma}\frac{r}{R^3}\int_0^R T(r)r^2\,\mathrm{d}r\right\}.$$

温度 $T(r)$ 是这样计算的，即把均匀加热球体的温度作为未形变时的起始温度. 在这里，选取球体外表面的温度作为这个起始温度，因此 $T(R)=0$.

习题 7 同习题 6，试确定具有轴对称温度分布的非均匀加热圆柱体的形变.

解：在柱坐标系中，用类似的方法可求得：

$$u=\alpha\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\left\{\frac{1}{r}\int_0^r T(r)r\mathrm{d}\,r+(1-2\sigma)\frac{r}{R^2}\int_0^R T(r)r\mathrm{d}r\right\}.$$

习题 8 试确定无限弹性介质的形变. 给定的温度分布：$T(x,y,z)$；在无限远处温度趋于常数值 T_0，而且此处介质没有形变.

解：方程(7.8)有一个明显的解，在这个解中

$$\nabla\times\boldsymbol{u}=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}=\alpha\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}[T(x,y,z)-T_0],$$

由矢量分析可知，若矢量 $\boldsymbol{u}$ 的散度等于定义于整个空间却在无限远处化为零的给定函数，并且该矢量的旋度恒为零，则它可写为如下形式：

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\nabla\int\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{u}(x',y',z')}{r}\mathrm{d}V',$$

式中 $r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$. 由此得到该问题的一般解形式：

$$\boldsymbol{u} = -\frac{\alpha(1+\sigma)}{12\pi(1-\sigma)}\nabla\int\frac{T'-T_0}{r}\mathrm{d}V', \tag{1}$$

式中 $T'\equiv T(x',y',z')$.

如果在无限介质的很小一部分体积（取在坐标原点）中给定某有限热量 q，则温度分布可以写为（C 为介质的热容量）：

$$T-T_0=\frac{q}{C}\delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

式中 δ 是 δ－函数. 这时，公式(1)中右边的积分等于 q/Cr，而位移矢量由下式给出：

$$\boldsymbol{u}=\frac{\alpha(1+\sigma)q}{12\pi(1-\sigma)C}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

习题 9　试导出用应力张量分量表示的（无体力时）各向同性物体的平衡方程.

解：待求的方程组除了包括三个平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=0 \tag{1}$$

外，同时还包括一些其它的方程，这是基于六个不同的应变分量 u_{ik} 不是独立的量的事实. 为了导出这些方程，首先写出应变分量 u_{ik} 应满足的一组微分关系式. 显而易见

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

恒满足关系式

$$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x_l\partial x_m}+\frac{\partial^2 u_{lm}}{\partial x_i\partial x_k}=\frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k\partial x_m}+\frac{\partial^2 u_{km}}{\partial x_i\partial x_l}.$$

这里总共有六个不同的关系式（分别对应于 i,k,l,m：1122，1133，2233，1123，2213，3312），我们保留所有这些关系，将上面的张量等式按指标 l,m 缩并可得

$$\nabla^2 u_{ik}+\frac{\partial^2 u_{ll}}{\partial x_i\partial x_k}=\frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k\partial x_l}+\frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x_i\partial x_l}. \tag{2}$$

根据式(5.12)，将用 σ_{ik} 表示的 u_{ik} 代入上式，并顾及到式(1)，则得到所要求的方程：

$$(1+\sigma)\nabla^2\sigma_{ik}+\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_i\partial x_k}=0. \tag{3}$$

这些方程在物体具有常体力时仍成立.

按指标 i,k 对方程式(3)缩并,得到

$$\nabla^2\sigma_{ll}=0,$$

即 σ_{ll} 是调和函数. 现在,对方程(3)作用算子 ∇^2,则得到

$$\nabla^2\nabla^2\sigma_{ik}=0,$$

即分量 σ_{ik} 是重调和函数. 其实,由于 σ_{ik} 和 u_{ik} 之间的线性关系,这些结论也可以直接由式(7.6)和(7.7)得到.

习题 10 试用任意的重调和矢量,表示(无体力时)平衡方程的一般积分(伽辽金(Б. Г. Галёркин),1930).

解:寻求方程式(7.4)的解,自然是下面的形式:

$$\boldsymbol{u}=\nabla^2\boldsymbol{f}+A\,\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{f}.$$

因此,$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=(1+A)\nabla\cdot\nabla^2\boldsymbol{f}$. 将其代入式(7.4),得到

$$(1-2\sigma)\nabla^2\nabla^2\boldsymbol{f}+[2(1-\sigma)A+1]\nabla(\nabla\cdot\nabla^2\boldsymbol{f})=0.$$

由此可见,如果 $\boldsymbol{f}$ 是任意的重调和矢量,即满足

$$\nabla^2\nabla^2\boldsymbol{f}=0,$$

则

$$\boldsymbol{u}=\nabla^2\boldsymbol{f}-\frac{1}{2(1-\sigma)}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{f}.$$

习题 11 试用应力函数的导数形式(用极坐标 r,φ)表示平面形变时的应力分量 $\sigma_{rr},\sigma_{\varphi\varphi},\sigma_{r\varphi}$.

解:由于未知的表达式不依赖于极角 φ 初始值的选择,所以,式中不会以显式的形式包含它. 因此,可以应用下述方法:将式(7.10)中关于笛卡儿坐标的导数代换为关于变量 r,φ 的导数. 注意到,当 $\varphi=0$(角 φ 从 x 轴算起)时,有

$$\sigma_{rr}=\sigma_{xx},\quad \sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{yy},\quad \sigma_{r\varphi}=\sigma_{xy}.$$

这样一来,就得到:

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\varphi^2},\quad \sigma_{\varphi\varphi}=\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2},\quad \sigma_{r\varphi}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right).$$

习题 12 试确定带有球形空腔的无限弹性介质在无限远处承受均匀形变时的应力分布.

解:一般的均匀形变可以表示为各向均匀拉伸(或压缩)和均匀剪切的叠加. 各向均匀拉伸(或压缩)已在习题 2 中研究过了,这样,只需研究均匀剪切形变就够了.

设 $\sigma_{ik}^{(0)}$ 为均匀应力场. 在没有空腔时,它存在于整个空间内. 在纯剪时,

$\sigma_{ii}^{(0)}=0$,相应的位移矢量用 $\boldsymbol{u}^{(0)}$ 表示,并将未知的解表示为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^{(0)}+\boldsymbol{u}^{(1)}$,其中 $\boldsymbol{u}^{(1)}$ 为受空腔制约的函数,在无限远处为零.

重调和方程的每一个解,都可以写为中心对称解及其对坐标的各阶导数之线性组合. 相互独立的中心对称解是 $r^2,r,1/r,1$. 因此,重调和矢量 $\boldsymbol{u}^{(1)}$ 的最一般形式,仅仅取决于作为参量的常值张量 $\sigma_{ik}^{(0)}$ 的分量,而且在无限远处趋近于零,于是有

$$u_i^{(1)}=A\sigma_{ik}^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r}+B\sigma_{kl}^{(0)}\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}\frac{1}{r}+C\sigma_{kl}^{(0)}\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}r. \tag{1}$$

将该式代入方程(7.4),得

$$(1-2\sigma)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}=[2(1-2\sigma)C+(A+2C)]\sigma_{kl}^{(0)}\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}\frac{1}{r}=0.$$

由此

$$A=-4C(1-\sigma).$$

在常数 A,B,C 中间,由空腔的边界条件还可以得到两个关系:即当 $r=R$ 时

$$(\sigma_{ik}^{(0)}+\sigma_{ik}^{(1)})n_k=0$$

(R 为空腔半径,坐标原点选在空腔中心;$\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量). 借助于式(1),经过十分冗长的计算,即可导出下面的值:

$$B=\frac{CR^2}{5},\quad C=\frac{5R^3(1+\sigma)}{2E(7-5\sigma)}.$$

应力分布的最后表达式,记为

$$\begin{aligned}\sigma_{ik}=&\sigma_{ik}^{(0)}\left[1+\frac{5(1-2\sigma)}{7-5\sigma}\left(\frac{R}{r}\right)^3+\frac{3}{7-5\sigma}\left(\frac{R}{r}\right)^5\right]+\\&+\frac{15}{7-5\sigma}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left[\sigma-\left(\frac{R}{r}\right)^2\right](\sigma_{il}^{(0)}n_kn_l+\sigma_{kl}^{(0)}n_ln_i)+\\&+\frac{15}{2(7-5\sigma)}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left[-5+7\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\sigma_{lm}^{(0)}n_ln_mn_in_k+\\&+\frac{15}{2(7-5\sigma)}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left[1-2\sigma-\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\delta_{ik}\sigma_{lm}^{(0)}n_ln_m.\end{aligned}$$

为了求得任意(而不是纯剪)的 $\sigma_{ik}^{(0)}$ 的应力分布,必须用 $\sigma_{ik}^{(0)}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}^{(0)}$ 代替 $\sigma_{ik}^{(0)}$,并增加适合于在无限远处均匀形变的表达式(比较习题2):

$$\frac{1}{3}\sigma_{ll}^{(0)}\left[\delta_{ik}+\frac{R^3}{2r^3}(\delta_{ik}-3n_in_k)\right].$$

在这里,我们对于空腔边界上的应力写出在一般情形下得到的结果:

$$\sigma_{ik}=\frac{15}{7-5\sigma}\{(1-\sigma)(\sigma_{ik}^{(0)}-\sigma_{il}^{(0)}n_ln_k-\sigma_{kl}^{(0)}n_ln_i)+\sigma_{lm}^{(0)}n_ln_mn_in_k-$$

$$-\sigma\sigma_{lm}^{(0)}n_l n_m\delta_{ik}+\frac{5\sigma-1}{10}\sigma_{ll}^{(0)}(\delta_{ik}-n_i n_k)\}.$$

在孔边附近的应力极大的超过了无限远处的应力，并且这个应力的增加具有明显的局部特性，即随着距离的增加应力迅速地衰减(这样的特性称为孔边应力集中). 例如，如果介质承受单一的均匀拉伸(只有 $\sigma_{zz}^{(0)}$ 不为零)，则最大应力将出现在空腔的赤道处，并且在这里

$$\sigma_{zz}=\frac{27-15\sigma}{2(7-5\sigma)}\sigma_{zz}^{(0)}.$$

§8 以平面为边界之弹性介质的平衡

现在来研究充满半无限空间的弹性介质，亦即限制于无限平面一侧的弹性介质. 我们来确定在附加于介质自由表面上的力的作用下介质的形变①. 这些力的分布只需满足一个条件：它们在无限远处必须为零，以使在无限远处不发生形变. 在这样的情形下，平衡方程可以有一般形式的积分(布希涅斯克(J. Boussinesq)，1885).

在介质所占有的整个体积内，平衡方程(7.4)均成立，即

$$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}+(1-2\sigma)\nabla^2\boldsymbol{u}=0. \tag{8.1}$$

我们寻求该方程组的解为如下形式：

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}+\nabla\varphi. \tag{8.2}$$

式中 φ 是某个标量函数，而矢量 $\boldsymbol{f}$ 满足拉普拉斯方程，即

$$\nabla^2\boldsymbol{f}=0. \tag{8.3}$$

将式(8.2)代入(8.1)，即得到关于 φ 的方程：

$$2(1-\sigma)\nabla^2\varphi=-\nabla\cdot\boldsymbol{f}. \tag{8.4}$$

取弹性介质的自由表面作为 xy 平面，介质所在区域对应 z 的正值. 将函数 f_x 和 f_y 写为某函数 g_x 和 g_y 对 z 的导数形式：

$$f_x=\frac{\partial g_x}{\partial z},\quad f_y=\frac{\partial g_y}{\partial z}. \tag{8.5}$$

因为 f_x 和 f_y 是调和函数，所以总可以选择函数 g_x，g_y，使其满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 g_x=0,\quad \nabla^2 g_y=0. \tag{8.6}$$

方程(8.4)现在具有如下形式：

$$2(1-\sigma)\nabla^2\varphi=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+f_z\right).$$

由于 g_x，g_y，f_z 都是调和函数，故极易确信满足上面的方程时，函数 φ 可以写为

① 所提问题最直接的标准解法是对方程式(8.1)应用傅里叶(Fourier)方法. 但是，这时必须进行十分复杂的积分计算. 下面讲述的一系列基于应用提出来的方法，计算比较简单.

$$\varphi = -\frac{z}{4(1-\sigma)}\left(f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + \psi, \tag{8.7}$$

式中的 ψ 仍然是调和函数：

$$\nabla^2\psi = 0. \tag{8.8}$$

这样一来，就把确定位移 $\boldsymbol{u}$ 的问题，归结为寻求函数 g_x, g_y, f_z 和 ψ 的问题了，而这些函数均满足拉普拉斯方程.

现在我们写出位于介质自由表面（$z=0$ 平面）上必须满足的边界条件.

因为表面外法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的指向与 z 轴的负方向一致，故根据边界条件的一般公式（2.9），应有 $\sigma_{iz} = -P_i$. 对于 σ_{ik} 利用一般表达式（5.11），并通过辅助量 g_x, g_y, f_z, ψ 表示矢量 $\boldsymbol{u}$ 的分量，经过简单的计算后即得到如下的边界条件：

$$\left.\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2}\right|_{z=0} + \left.\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}\right|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}P_x,$$

$$\left.\frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2}\right|_{z=0} + \left.\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}\right|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}P_y, \tag{8.9}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\left\{f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}\right|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}P_z. \tag{8.10}$$

附加于表面的外力分量 P_x, P_y, P_z 是坐标 x, y 的已知函数，在无限远处这些函数化为零.

借助于引入的辅助量 g_x, g_y, f_z, ψ 的公式，不能以完全单值的形式确定它们，在选择这些函数时还保留了某些任意性. 因此，还可以在这些量中增加某些任意的附加条件. 作为这样附加条件最方便的方法是要求位于方程（8.9）大括号内的值化为零①：

$$(1-2\sigma)f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 4(1-\sigma)\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0. \tag{8.11}$$

于是，式（8.9）的条件被简化，并给出

$$\left.\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2}\right|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}P_x, \quad \left.\frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2}\right|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}P_y. \tag{8.12}$$

由方程（8.10），（8.12）足以计算出全部的调和函数 g_x, g_y, f_z, ψ.

为了以后书写公式简单，我们来研究在弹性半空间的自由表面上作用集中

---

① 这里我们没有证明附加这样条件的可能性，但是从我们没有得出相互矛盾的结果可以判断出这种可能性是存在的.

力 $\boldsymbol{F}$ 的情形，即力附加在表面极小的可以认为是点的区域上. 此力的作用，可以写为按下式之规律分布的表面力的作用，即

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\delta(x)\delta(y).$$

式中 δ 是 δ 函数，而坐标原点就选在施力点上. 已知集中力问题的解后，就可以直接建立任意分布力 $\boldsymbol{P}(x,y)$ 问题的解. 亦即，如果

$$u_i = G_{ik}(x,y,z)F_k \tag{8.13}$$

为附加于坐标原点的集中力 $\boldsymbol{F}$ 作用下的位移，则在 $\boldsymbol{P}(x,y)$ 作用下的位移可由下面的积分给出[1]：

$$u_i = \iint G_{ik}(x-x',y-y',z)P_k(x',y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'. \tag{8.14}$$

由势论可知，如调和函数 f 在无限远处变为零，却在 $z=0$ 的平面上具有给定的法向导数 $\partial f/\partial z$，则 f 可由下面的公式确定：

$$f(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi}\iint \left.\frac{\partial f(x',y',z)}{\partial z}\right|_{z=0}\frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{r},$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}.$$

因为 $\partial g_x/\partial z$ 和 $\partial g_y/\partial z$ 以及位于方程(8.10)大括号内的量均满足拉普拉斯方程，而等式(8.10)和(8.12)刚好确定它们在 $z=0$ 平面上的法向导数，于是有

$$f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\iint\frac{P_z(x',y')}{r}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_z}{r}, \tag{8.15}$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_x}{r},\quad \frac{\partial g_y}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_y}{r}, \tag{8.16}$$

式中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

在未知矢量 $\boldsymbol{u}$ 的分量表达式中，没有包含 g_x, g_y 本身，而只包含它们关于 x, y,z 的导数. 为了计算 $\partial g_x/\partial x, \partial g_y/\partial y$，将等式(8.16)分别对 x 和 y 求导数：

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial x\partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_x x}{r^3},\quad \frac{\partial^2 g_y}{\partial y\partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_y y}{r^3}.$$

现在从 ∞ 到 z 按 $\mathrm{d}z$ 积分上式，得

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_x x}{r(r+z)},\quad \frac{\partial g_y}{\partial y} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_y y}{r(r+z)}. \tag{8.17}$$

在这里，我们不进一步去作简单但却十分烦琐的计算. 先从方程(8.11)，(8.15)和(8.17)求出 f_z 和 $\partial\psi/\partial z$. 知道了 $\partial\psi/\partial z$ 后，就很容易计算出 $\partial\psi/\partial x$, $\partial\psi/\partial y$. 首先把它们对 z 进行积分，然后再分别对 x 和 y 微分. 这样就得到了按

---

[1] 按照数学的术语，G_{ik} 是关于半无限介质平衡方程的格林(Green)张量.

式(8.2),(8.5),(8.7)计算位移矢量时所需要的各个量. 最后得到下面的公式:

$$u_x=\frac{1+\sigma}{2\pi E}\left\{\left[\frac{xz}{r^3}-\frac{(1-2\sigma)x}{r(r+z)}\right]F_z+\frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)}F_x+\right.$$
$$\left.+\frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]x}{r^3(r+z)^2}(xF_x+yF_y)\right\},$$

$$u_y=\frac{1+\sigma}{2\pi E}\left\{\left[\frac{yz}{r^3}-\frac{(1-2\sigma)y}{r(r+z)}\right]F_z+\frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)}F_y+\right.$$
$$\left.+\frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]y}{r^3(r+z)^2}(xF_x+yF_y)\right\},$$

$$u_z=\frac{1+\sigma}{2\pi E}\left\{\left[\frac{2(1-\sigma)}{r}+\frac{z^2}{r^3}\right]F_z+\left[\frac{1-2\sigma}{r(r+z)}+\frac{z}{r^3}\right](xF_x+yF_y)\right\}.\quad(8.18)$$

特别是,当 $z=0$ 时,即可由此得到在介质自由表面上点的位移公式:

$$u_x=\frac{1+\sigma}{2\pi E}\frac{1}{r}\left\{-\frac{(1-2\sigma)x}{r}F_z+2(1-\sigma)F_x+\frac{2\sigma x}{r^2}(xF_x+yF_y)\right\},$$

$$u_y=\frac{1+\sigma}{2\pi E}\frac{1}{r}\left\{-\frac{(1-2\sigma)y}{r}F_z+2(1-\sigma)F_y+\frac{2\sigma y}{r^2}(xF_x+yF_y)\right\},$$

$$u_z=\frac{1+\sigma}{2\pi E}\frac{1}{r}\left\{2(1-\sigma)F_z+(1-2\sigma)\frac{1}{r}(xF_x+yF_y)\right\}.\quad(8.19)$$

习　　题

习题　试确定无限弹性介质在小的局部区域附加力 $\boldsymbol{F}$ 时的形变(W. 汤姆孙(W. Thomson),1848)①.

解:在研究距离 r 远大于附加力区域尺度的形变时,可以认为力是附加在一个点上. 平衡方程为(比较式(7.2)):

$$\nabla^2\boldsymbol{u}+\frac{1}{1-2\sigma}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}=-\frac{2(1+\sigma)}{E}\boldsymbol{F}\delta(\boldsymbol{r}).\quad(1)$$

(式中 $\delta(\boldsymbol{r})\equiv\delta(x)\delta(y)\delta(z)$,而坐标原点选在力的作用点上). 设解的形式为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u}_1$,其中 $\boldsymbol{u}_0$ 满足泊松方程:

$$\nabla^2\boldsymbol{u}_0=-\frac{2(1+\sigma)}{E}\boldsymbol{F}\delta(\boldsymbol{r}).\quad(2)$$

相应的得到 $\boldsymbol{u}_1$ 的方程:

---

① 对于任意的无限各向异性介质中的类似问题,已由栗弗席兹和劳捷茨维格(Л. Н. Розенцвейг)解决(实验物理和理论物理杂志(ЖЭТФ),1947, 17: 783 页).

$$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1+(1-2\sigma)\nabla^2\boldsymbol{u}_1=-\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0. \tag{3}$$

方程(2)在无限远处化为零的解为

$$\boldsymbol{u}_0=\frac{1+\sigma}{2\pi E}\frac{\boldsymbol{F}}{r}.$$

对方程(3)应用旋度算子,则得到$\nabla^2\ \nabla\times\boldsymbol{u}_1=0$. 在无限远处应有$\nabla\times\boldsymbol{u}_1=0$. 但是,在整个空间内调和却在无限远处为零的函数恒等于零. 于是,$\nabla\times\boldsymbol{u}_1=0$,并且相应的可以将$\boldsymbol{u}_1$写为$\boldsymbol{u}_1=\nabla\varphi$,由式(3)得到

$$\nabla\{2(1-\sigma)\nabla^2\varphi+\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0\}=0.$$

由此得出,位于大括号里面的值是常量,而且在无限远处它必须为零,所以在全部空间里,有

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0}{2(1-\sigma)}=-\frac{1+\sigma}{4\pi E(1-\sigma)}\boldsymbol{F}\cdot\nabla\frac{1}{r}.$$

如果ψ是方程$\nabla^2\psi=1/r$的解,则

$$\varphi=-\frac{1+\sigma}{4\pi E(1-\sigma)}\boldsymbol{F}\cdot\nabla\psi.$$

取不具有奇异性的解$\psi=r/2$,我们得到

$$\boldsymbol{u}_1=\nabla\varphi=\frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)}\frac{(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{F}}{r},$$

式中$\boldsymbol{n}$为径矢$\boldsymbol{r}$方向的单位矢量. 最后有

$$\boldsymbol{u}=\frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)}\frac{(3-4\sigma)\boldsymbol{F}+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F})}{r}.$$

将该式代入式(8.13),得到无限各向同性介质平衡方程的格林张量①:

$$G_{ik}=\frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)}[(3-4\sigma)\delta_{ik}+n_in_k]\frac{1}{r}=\frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\delta_{ik}}{r}-\frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}r\right].$$

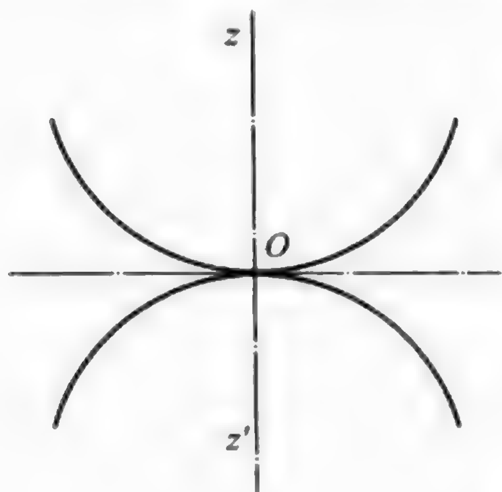
§9 固体的接触

设两个固体彼此相互接触在一点,该点不是它们表面上的奇异点(图1(a)表示通过接触点O附近的两个表面的横截面). 在这个接触点上,两表面具有一

---

① 事实上,由方程(1)的齐次性考虑,很明显张量G_{ik}的分量是坐标x,y,z的一次齐次函数. 式(1)左边是矢量$\boldsymbol{u}$之分量的二次导数的线性组合,而右边是三次齐次函数($\delta(a\boldsymbol{r})=a^{-3}\delta(\boldsymbol{r})$). 这一性质在一般的任意各向异性介质情形仍然存在.

个共同的切平面，就把它取作 xy 平面. 而 z 轴的正方向，对于两个物体是不相同的，我们约定：对于其中的每一个，z 坐标都沿着物体深度方向计算，相应的用 z 和 z' 表示.



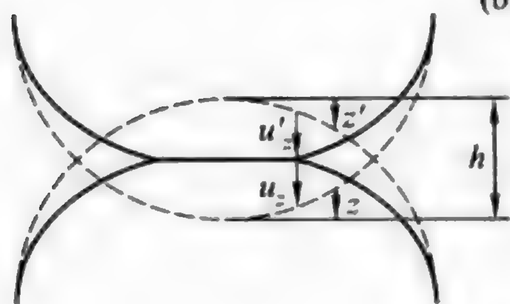


图 1

众所周知，在坐标平面（xy 平面）上的通常切点（接触点）附近，曲面方程可以写为

$$z = \kappa_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \tag{9.1}$$

式中的两对重复指标 α，β 系指按数值 1，2 求和（$x_1 = x, x_2 = y$），而 $\kappa_{\alpha\beta}$ 为描述曲面曲率的二阶对称张量（张量 $\kappa_{\alpha\beta}$ 的主值等于 $1/2R_1$ 和 $1/2R_2$，其中 R_1，R_2 为接触点处曲面的两个主曲率半径）. 对于接触点附近第二个物体的曲面，可以写出类似的关系式：

$$z' = \kappa'_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta. \tag{9.2}$$

现在假设我们对两个物体施加力使之受到挤压，其结果使它们接近了某个小的距离 h①.

于是，在物体表面上，最初接触点的附近发生了变化，物体的接触已经不再是一个点，而是表面的某个小的有限区域. 设 u_z 和 u'_z 分别为挤压时两个物体表面上各点沿 z 轴和 z' 轴的位移矢量之分量. 图 1(b) 中的虚线表示没有形变时的物体表面，而实线表示受挤压后物体的表面. 字母 z 和 z' 分别表示由等式(9.1)和(9.2)确定的长度. 由图直接看出，在接触区域的所有点上存在如下的等式：

$$(z + u_z) + (z' + u'_z) = h,$$

或

$$(\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}) x_\alpha x_\beta + u_z + u'_z = h. \tag{9.3}$$

在这个区域以外的点，由于两个表面都没有接触，有不等式

$$z + z' + u_z + u'_z < h.$$

我们这样来选择 x，y 轴的方向，使张量 $\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}$ 变换到主轴上. 该张量的主值用 A 和 B 表示，则等式(9.3)将改写为

$$Ax^2 + By^2 + u_z + u'_z = h. \tag{9.4}$$

不进行推导，我们引入关于 A，B 与两个表面的曲率半径 R_1，R_2 和 R'_1，R'_2 之间关系的公式：

$$2(A + B) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2},$$

① 弹性理论接触问题是由赫兹（H. Hertz，1882）首次解决的.

$$4(A-B)^2=\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)^2+\left(\frac{1}{R_1'}-\frac{1}{R_2'}\right)^2+2\cos\quad 2\varphi\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{R_1'}-\frac{1}{R_2'}\right),$$

式中 φ 是两个曲面法截面的曲率半径 R_1 和 R_1' 之间的夹角. 曲率半径的符号：如果曲率中心位于相应物体的内部，设其为正，反之为负.

用 $P_z(x,y)$ 表示在接触点上，两个受挤压物体之间的压力（自然，在接触区域之外，$P_z=0$）. 在确定 P_z 和位移 u_z,u_z' 之间关系时，可以把物体表面作为平面来考虑，这是足够精确的，并可以利用上节得到的公式. 按照(8.19)的第三个公式（同时顾及式(8.14)），在法向力 $P_z(x,y)$ 作用下，位移 u_z,u_z' 可由下面的表达式确定：

$$u_z=\frac{1-\sigma^2}{\pi E}\iint\frac{P_z(x',y')}{r}\mathrm{d}\,x'\mathrm{d}\,y',$$

$$u_z'=\frac{1-\sigma'^2}{\pi E'}\iint\frac{P_z(x',y')}{r}\mathrm{d}\,x'\mathrm{d}\,y' \tag{9.5}$$

（σ,σ' 和 E,E' 分别为两个物体的泊松比和拉伸模量）. 因为在接触区域之外 $P_z=0$，所以在这里的积分可以只在接触区域之内进行. 注意，由这些公式得到的位移比 u_z/u_z' 为常数，并等于

$$\frac{u_z}{u_z'}=\frac{(1-\sigma^2)E'}{(1-\sigma'^2)E}. \tag{9.6}$$

关系式(9.4)和(9.6)一起直接地确定出沿着接触区域的形变，即位移 u_z,u_z' 的分布（自然，公式(9.5)和(9.6)也适用于接触区域以外的点）.

将表达式(9.5)代入(9.4)，得到

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\sigma^2}{E}+\frac{1-\sigma'^2}{E'}\right)\iint\frac{P_z(x',y')}{r}\mathrm{d}\,x'\mathrm{d}\,y'=h-Ax^2-By^2. \tag{9.7}$$

该积分方程确定了接触压力 P_z 沿着接触区域的分布. 它的解可由下述势论中熟知的关系式进行类比得到. 利用这一类比的思想是基于如下的事实：第一，位于方程式(9.7)左边的积分，是势论中用以确定某个分布电荷产生的势的普通积分类型；第二，均匀带电椭球内部的场势是坐标的二次函数.

如果按三轴椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的体积均匀分布电荷（体积密度 ρ 为常量），则椭球内部的场势由如下表达式确定：

$$\varphi(x,y,z)=\pi\rho abc\int_0^\infty\left\{1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}-\frac{z^2}{c^2+\xi}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)}}.$$

在极限情形下，极扁（在 z 轴方向）的椭球，相当于 $c\to 0$，由此得到

$$\varphi(x,y) = \pi\rho abc\int_0^\infty \left\{1 - \frac{x^2}{a^2+\xi} - \frac{y^2}{b^2+\xi}\right\}\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}$$

（自然，在 $c\to 0$ 取极限时，同时也令椭球内部坐标 z 等于零）．另一方面，势 $\varphi(x,y,z)$ 可以写为下面的积分形式：

$$\varphi(x,y,z) = \iiint \frac{\rho\mathrm{d}\,x'\mathrm{d}\,y'\mathrm{d}\,z'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2(z-z')^2}},$$

式中的积分是沿着椭球体积进行的．这里，在 $c\to 0$ 取极限时，应该令根号里面的 $z=z'=0$，在区间 $\pm c\left(1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}\right)^{1/2}$ 之间按 $\mathrm{d}z'$ 进行积分，得到

$$\varphi(x,y) = 2\rho c\iint \frac{\mathrm{d}\,x'\mathrm{d}\,y'}{r}\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}}\quad \left(r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\right),$$

式中的积分是沿椭圆 $x'^2/a^2+y'^2/b^2=1$ 内部的面积进行的．使 $\varphi(x,y)$ 的两个表达式相等，则得到下面的恒等式：

$$\iint \frac{\mathrm{d}\,x'\mathrm{d}\,y'}{r}\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}} = \frac{\pi ab}{2}\int_0^\infty \left\{1 - \frac{x^2}{a^2+\xi} - \frac{y^2}{b^2+\xi}\right\}\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}. \tag{9.8}$$

将上面的关系式与式(9.7)比较，我们看到：在它们的右边，关于 x 和 y 的二次函数是同样类型的；在它们的左边，积分也是同样类型的．由此，可以立即得出结论：物体接触区域（即式(9.7)中的积分区域）局限于椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{9.9}$$

而函数 $P_z(x,y)$ 应具有如下形式：

$$P_z(x,y) = \mathrm{const}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

常数 const 的选择，应使沿着接触区域的积分 $\iint P_z\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,y$ 等于给定的使两个物体相互挤压的力 F，我们得到

$$P_z(x,y) = \frac{3F}{2\pi ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}. \tag{9.10}$$

该式给出了压力按接触区域面积分布的规律．注意，在接触区域中心的压力为平均压力 $F/(\pi ab)$ 的 1.5 倍．

将式(9.10)代入方程(9.7)，并且在其得到的积分里按照式(9.8)的表达式进行代换，可得

$$\frac{FD}{\pi}\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}=h-Ax^2-By^2,$$

式中

$$D=\frac{3}{4}\left(\frac{1-\sigma^2}{E}+\frac{1-\sigma'^2}{E'}\right).$$

上面这个等式，对于（在椭圆(9.9)内部）所有的 x,y 值都必须恒成立．所以，在等式两边，x 和 y 前面的系数以及自由项都应该两两分别相等．由此求得下面的关系式：

$$h=\frac{FD}{\pi}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}},\tag{9.11}$$

$$A=\frac{FD}{\pi}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{(a^2+\xi)\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}},$$

$$B=\frac{FD}{\pi}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{(b^2+\xi)\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}.\tag{9.12}$$

方程(9.12)根据所给的力 F 确定了接触区域的半轴 a 和 b（对于给定的物体，A 和 B 是已知的）．然后，由关系式(9.11)确定力 F 和因它而引起的物体靠近距离 h 之间的关系．位于这些方程右边的积分都是椭圆积分．

这样一来，关于物体接触的问题就可以认为是完全解决了．物体在接触区域以外的表面形状（即位移 u_z,u'_z）也已由公式(9.5)，(9.10)确定，而且积分值可以立即求出，其出发点还是利用与充电椭球体势场的类比．不过，这一次是在椭球体的外部．最后，用上节的公式同样可以确定沿物体体积的形变分布（自然，只是在远小于物体尺度的距离）．

现在我们将所得到的公式，应用于具有半径分别为 R,R' 的两个球体的接触上．在这里

$$A=B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

从对称性考虑，很明显，将有 $a=b$，亦即接触区域是圆．由式(9.12)得到接触区域半径 a 的值：

$$a=F^{1/3}\left(D\frac{RR'}{R+R'}\right)^{1/3}.\tag{9.13}$$

在现在的情形下，h 是 $(R+R')$ 与两球心距离之差．由式(9.10)得到 F 和 h 之间的关系式如下：

$$h=F^{2/3}\left[D^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\right]^{1/3}.\tag{9.14}$$

我们注意到，h 与幂 $F^{2/3}$（挤压力的 2/3 次方）成正比，力 F 与幂 $h^{3/2}$（由挤压力引起的物体靠近距离的 3/2 次方）成正比．我们还可以写出两球体接触的势能 U.

注意,使$(-F)=-\partial U/\partial h$,即得到:

$$U=h^{5/2}\frac{2}{5D}\left(\frac{RR'}{R+R'}\right)^{1/2}. \tag{9.15}$$

最后,我们指出,形式为

$$h=\text{const}\cdot F^{2/3},\quad F=\text{const}\cdot h^{3/2}$$

的关系不仅对于球体成立,而且在其它有限尺度的物体接触时也成立. 这点从类比来考虑极易确信. 如果进行代换:

$$a^2\to\alpha a^2,\quad b^2\to\alpha b^2,\quad F\to\alpha^{3/2}F,$$

其中α为任意常数,则方程(9.12)保持不变,而在方程(9.11)的右边乘上了个α,为了保持方程不变,必须用αh代替h,由此得到,F必须正比于$h^{3/2}$.

习　　题

习题1　试确定两个弹性球在相互碰撞时的接触时间.

解:两个球的惯性中心处于静止的参考系中,碰撞之前球的能量等于相对运动的动能$\mu v^2/2$,其中v为两球相互碰撞的相对速度,而$\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$为它们的折合质量. 当两球碰撞时,总的能量等于动能与势能之和,动能可以写为$\mu\dot{h}^2/2$,而势能为式(9.15). 根据能量守恒定律,有

$$\mu\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2+kh^{5/2}=\mu v^2,\quad k=\frac{4}{5D}\left(\frac{RR'}{R+R'}\right)^{1/2}.$$

设两球最大的靠近距离为h_0,它对应于两球相对速度$\dot{h}$变为零的那一时刻,并且等于

$$h_0=\left(\frac{\mu}{k}\right)^{2/5}v^{4/5}.$$

两球碰撞延续的时间τ(亦即,h先从0变到h_0,再返回到0的时间)等于

$$\tau=2\int_0^{h_0}\frac{\mathrm{d}\,h}{(v^2-kh^{5/2}/\mu)^{1/2}}=2\left(\frac{\mu^2}{k^2v}\right)^{1/5}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-x^{2/5}}},$$

或

$$\tau=\frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(2/5)}{5\Gamma(9/10)}\left(\frac{\mu^2}{k^2v}\right)^{1/5}=2.94\left(\frac{\mu^2}{k^2v}\right)^{1/5}.$$

在求解这一问题时,用到了有关的静力学公式,从而忽略了在碰撞时球所产生的弹性振动. 这一忽略的可能性要求速度v比声速要足够的小. 但是,事实上这个理论的实用性,首先还局限于由于在碰撞时产生的形变超过了材料的弹性极限.

习题2　试确定两个圆柱在顺着它们的母线挤压时,接触区域的大小和压力分布.

解:在这种情形下,接触区域是沿圆柱长度的狭长条. 它的宽度为$2a$,而在

它上面的压力分布可以从本节得到的公式中，用 $b/a\to\infty$ 取极限的方法求出. 压力分布为如下形式的函数：

$$P_z(x) = \text{const}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

(x 是接触狭长条沿宽度方向的坐标). 设沿圆柱单位长度上的挤压力为 F，我们得到

$$P_z(x) = \frac{2F}{\pi a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

将该表达式代入式(9.7)，并借助于式(9.8)进行积分，则有

$$A = \frac{4DF}{3\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,\xi}{(a^2+\xi)^{3/2}\xi} = \frac{8DF}{3\pi a^2}.$$

圆柱表面的一个曲率半径是无限的，而另一个与圆柱半径相同. 由此，在给定情形下，有

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),\quad B=0.$$

最后，求出接触狭长条的宽度：

$$a = \left(\frac{16DF}{3\pi}\frac{RR'}{R+R'}\right)^{1/2}.$$

§10 晶体的弹性性质

晶体在等温压缩时，自由能的变化与各向同性物体一样，也是应变张量的二次函数. 而与各向同性物体不同的是，现在这个函数所包含的独立系数不是两个，而是更多个.

形变晶体自由能的一般形式为

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm},\tag{10.1}$$

式中 λ_{iklm} 是四阶张量，称为**弹性模量张量**. 由于应变张量的对称性，所以在交换指标 i 与 k，l 与 m 或交换指标对 i,k 与 l,m 时，积 $u_{ik}u_{lm}$ 不变. 因此，显然可以确定，对于交换指标，张量 λ_{iklm} 也具有同样的对称性：

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}.\tag{10.2}$$

用简单地计算方法可以证实，具有这样对称性质的四阶张量，在一般情形下，其分量的个数等于 21[1].

---

[1] 在一些文献中利用同样的记号将四阶张量 λ_{iklm} 的分量写为带有两个指标的量 $\lambda_{\alpha\beta}$，将 α 和 β 遍及 1,2,3,4,5,6 取值，对应于相应的指标对：xx,yy,zz,yz,zx,xy

根据自由能表达式(10.1),应力张量与应变张量的关系在晶体中的形式(比较44页的脚注)为

$$\sigma_{ik}=\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}=\lambda_{iklm}u_{lm}. \tag{10.3}$$

由于晶体存在着这样或那样的对称性,导致张量 λ_{iklm} 不同分量之间出现了相互依存的关系,使它们独立分量的个数小于21个.

现在,我们对晶体宏观对称性的所有可能类型,亦即对按结晶系列①分布的全部晶体种类(参见第五卷,§130,131)来研究张量 λ_{iklm} 各分量之间的相互依存关系.

1. **三斜晶系**. 三斜对称性(C_1 和 C_i 类)并未对张量 λ_{iklm} 的分量附加任何约束,可是从对称性的观点来看,坐标系的选择完全是任意的. 此时,不为零而独立的弹性模量总共有21个. 但是,由于坐标系选择的任意性,使张量 λ_{iklm} 的分量增加了附加条件. 因为,坐标系相对于物体的取向是由三个量(旋转角)来确定的,所以这样的条件应该有三个. 例如,可以认为分量中有三个等于零. 由此,描述晶体弹性性质的量是18个独立而不为零的**弹性模量**和确定晶体轴取向的3个角.

2. **单斜晶系**. 研究其中的 C_s 类. 我们选择坐标系使其 xy 平面与对称面重合,当对该平面作镜射(反射)时,使坐标发生变换:$x\to x, y\to y, z\to -z$. 张量分量的变换与相应坐标乘积的变换是一样的. 因此,很明显,在进行上述的坐标变换时,张量 λ_{iklm} 的所有分量中,凡是指标中含有奇数(1或3)次 z 指标的分量都改变了自己的符号,而其余的分量均保持不变. 另一方面,由于晶体的对称性,在对称平面作镜射时,所有表征晶体性质的量(其中包括 λ_{iklm} 的所有分量在内)必须保持不变. 因此,很明显,所有具有奇数个 z 指标的分量必须等于零. 所以,单斜晶系的晶体弹性自由能的一般表达式为

$$\begin{aligned}F=&\frac{1}{2}\lambda_{xxxx}u_{xx}^2+\frac{1}{2}\lambda_{yyyy}u_{yy}^2+\frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2+\lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy}+\\&+\lambda_{xxzz}u_{xx}u_{zz}+\lambda_{yyzz}u_{yy}u_{zz}+2\lambda_{xyxy}u_{xy}^2+2\lambda_{xzxz}u_{xz}^2+2\lambda_{yzyz}u_{yz}^2+\\&+2\lambda_{xxxy}u_{xx}u_{xy}+2\lambda_{yyyx}u_{yy}u_{yx}+2\lambda_{xyzz}u_{xy}u_{zz}+4\lambda_{xzyz}u_{xz}u_{yz}.\end{aligned} \tag{10.4}$$

在该表达式中,有13个独立系数. 对于 C_2 类,以及总共包含两个对称元素(C_2 和 σ_h)的 C_{2h} 类,也可以得到同样的表达式. 但是,在上面的论述中,考虑对称性只是确定选择一个坐标轴(z)的方向,而在垂直平面上的 x 轴和 y 轴仍然是任意的. 于是,可以利用这个任意性适当的选择坐标轴使其中的一个分量,比如说

---

① 晶体共分为七大晶系,每一晶系又有若干种类. 七大晶系是:1. 三斜晶系;2. 单斜晶系;3. 正交晶系,又称斜方晶系;4. 四方晶系,又称正方晶系;5. 三方晶系,又称三角晶系或菱方晶系;6. 六方晶系,又称六角晶系;7. 立方晶系,又称等轴晶系.

——译者注

λ_{xyzz}化为零. 因此,表征晶体弹性性质的 13 个量,是 12 个不为零的弹性模量和一个在 xy 平面上确定轴取向的角.

3. **正交晶系**. 在这一晶系中,所有各类(C_{2v},D_2,D_{2h})坐标轴的选择都是由对称性唯一确定的,并得到具有相同形式的自由能表达式. 例如,我们来研究 D_{2h}类,并把这类晶体的三个对称面选为坐标平面. 在对其中的每一个对称面进行镜射时,都是一次坐标变换,其中一个坐标改变了符号,而其它两个坐标不改变符号. 所以,很明显,张量 λ_{iklm}的所有分量中,只有当指标 x,y 和 z 中的任何一个有偶数次相遇时这个分量才不为零,所有剩下的分量在对任意一个对称平面镜射时都应改变符号. 这样一来,在正交晶系中,自由能的一般表达式具有如下形式:

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{xxxx}u_{xx}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{yyyy}u_{yy}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy} + \\ + \lambda_{xxzz}u_{xx}u_{zz} + \lambda_{yyzz}u_{yy}u_{zz} + 2\lambda_{xyxy}u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz}u_{xz}^2 + 2\lambda_{yzyz}u_{yz}^2. \tag{10.5}$$

它总共包含有 9 个弹性模量.

4. **四方晶系**. 我们研究 C_{4v}类. 选取坐标时,用 C_4 轴作 z 轴,而 x 轴和 y 轴正交于两个垂直的对称平面上. 对这两个对称平面作镜射,就表示作相应的变换:$x\to -x$,$y\to y$,$z\to z$ 和 $x\to x$,$y\to -y$,$z\to z$. 因此,张量 λ_{iklm}中具有奇数个相同指标的分量全都消失了. 其次,再绕 C_4 轴旋转 $\pi/4$ 角,即作变换:$x\to y$,$y\to -x$,$z\to z$,并由此推断出如下关系:

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy},\lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz},\lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz}.$$

在 C_{4v}类中引入其余的变换,都不会再增加任何条件. 这样一来,四方晶系的自由能表达式具有如下形式:

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{xxxx}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2) + \frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxzz}(u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + \\ + \lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy} + 2\lambda_{xyxy}u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \tag{10.6}$$

它包含有 6 个弹性模量.

对于四方晶系的其它各类也可以得到同样的结果. 在这里,坐标轴的选取自然是由对称性(D_{2d},D_4,D_{4h})指使的. 而在 C_4,S_4,C_{4h}类,只有唯一的一个选择,就是轴(z)沿着 C_4 或 S_4 轴. 这时,由对称性要求,还允许存在(除了在式(10.6)中出现的以外)下面的分量:

$$\lambda_{xxxy} = -\lambda_{yyyx}.$$

若适当地选择 x 和 y 轴的方向,就能够使上述这些分量化为零,这时 F 也重新表示为式(10.6)的形式.

5. **三方晶系**. 我们研究 C_{3v} 类，选取坐标系时，使 z 轴沿着三次轴[①]，而 y 轴正交于垂直的对称平面中的一个. 为了说明由于 C_3 轴的存在而对张量分量 λ_{iklm} 所增加的限制，我们引入复数“坐标”ξ,η，适当地进行形式上的变换. 根据定义：

$$\xi = x + \mathrm{i}y, \quad \eta = x - \mathrm{i}y, \tag{10.7}$$

而坐标 z 仍保持不变. 我们再把张量 λ_{iklm} 变换到这些新坐标上，张量分量的指标现在用 ξ,η,z 表示. 显而易见，在绕 z 轴旋转 120°时，新变量的变换为：

$$\xi \to \xi \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}, \quad \eta \to \eta \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}, \quad z \to z.$$

由于晶体的对称性，所以 λ_{iklm} 的分量中不为零的只有在进行上面的变换时不变化的那些分量. 显然，具有这一性质的分量是指标 ξ 或 η 中重复三次（注意到 $(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}})^3 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$）的分量，或者指标 ξ 和 η 含有同样次数（因为 $\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}}{3}} = 1$）的分量. 上述的分量是：

$$\lambda_{zzzz}, \quad \lambda_{\xi\eta\xi\eta}, \quad \lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \quad \lambda_{\xi\eta zz}, \quad \lambda_{\xi z\eta z}, \quad \lambda_{\xi\xi\xi z}, \quad \lambda_{\eta\eta\eta z}.$$

其次，在对垂直于 y 轴的对称平面作镜射时，有变换：$x\to x, y\to -y, z\to z$，或者对于 ξ,η 变换：$\xi\to\eta, \eta\to\xi$. 因为，这一变换将 $\lambda_{\xi\xi\xi z}$ 变为 $\lambda_{\eta\eta\eta z}$，故这两个分量应该彼此相等. 这样一来，三方晶系的晶体总共有六个弹性模量. 为了写出自由能表达式，需要组成和式 $\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}$，并将和式的指标通过 ξ,η,z 表示. 因为 F 是由应变张量的分量（通过坐标 x,y,z）表示的，因此我们必须把这些分量也用“坐标” ξ,η,z 来表示. 这并不难做到，只需利用这样的事实，即张量 u_{ik} 的分量与对应的两个坐标乘积的变换是同样的. 比如，由

$$\xi\xi = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$$

得到

$$u_{\xi\xi} = u_{xx} - u_{yy} + 2\mathrm{i}u_{xy}.$$

最后得到 F 的表达式如下：

$$\begin{aligned} F = &\frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta}(u_{xx} + u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta}[(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2] + \\ &+ 2\lambda_{\xi\eta zz}(u_{xx} + u_{yy})u_{zz} + 4\lambda_{\xi z\eta z}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2) + \\ &+ 4\lambda_{\xi\xi\xi z}[(u_{xx} - u_{yy})u_{xz} - 2u_{xy}u_{yz}]. \end{aligned} \tag{10.8}$$

它含有 6 个独立系数. 对于 D_3 和 D_{3d} 类也可以得到同样的结果. 在 C_3 和 S_6 类，x,y 轴的选择仍然是任意的，对称性的要求也允许差式

$$\lambda_{\xi\xi\xi z} - \lambda_{\eta\eta\eta z}$$

---

① 如果晶体绕某轴旋转 360°/n 后，移到与原始位置不能区分的位置，则该轴称为 n 次旋转轴或 n 次对称轴，它是一种对称元素，n 称为轴次，n 只有 1,2,3,4,6 等五个正整数. 此处的 n 等于 3，故称三次轴，以下同.

——译者注

不为零. 但是,若适当的选择 x,y 轴,它可以化为零.

6. **六方晶系**. 我们研究 C_6 类,并在选择坐标系时使 z 轴沿晶体的六次轴. 重新引入坐标式(10.7),当围绕 z 轴旋转 $2\pi/6$ 时,得到如下变换:

$$\xi\to\xi e^{\frac{2\pi i}{6}},\quad \eta\to\eta e^{-\frac{2\pi i}{6}}.$$

由此可见,张量 λ_{iklm} 不为零的分量,只有指标 ξ 和 η 相遇时出现次数相同的那些项. 这样的分量就是:

$$\lambda_{zzzz},\quad \lambda_{\xi\eta\xi\eta},\quad \lambda_{\xi\xi\eta\eta},\quad \lambda_{\xi\eta zz},\quad \lambda_{\xi z\eta z}.$$

六方晶系其它可能的对称元素,对这些分量没有增加任何限制. 这样一来,总共有五个弹性模量. 自由能具有如下形式:

$$F=\frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2+2\lambda_{\xi\eta\xi\eta}(u_{xx}+u_{yy})^2+\lambda_{\xi\xi\eta\eta}[(u_{xx}-u_{yy})^2+4u_{xy}^2]+$$
$$+2\lambda_{\xi\eta zz}u_{zz}(u_{xx}+u_{yy})+4\lambda_{\xi z\eta z}(u_{xz}^2+u_{yz}^2).\qquad(10.9)$$

应当指出,在 xy 平面内的形变(不为零的应变 u_{xx},u_{yy},u_{xy}),总共取决于两个弹性模量,就像各向同性物体一样. 换句话说,在垂直六次轴的平面内,六方晶体的弹性性质是各向同性的. 按此原则,在该平面内坐标轴方向的选择一般是不重要的,并且对于 F 的形式没有任何影响. 因此,表达式(10.9)是对所有六方晶系的.

7. **立方晶系**. 将立方晶系的三个四次轴分别取作 x,y,z 轴. 由于已经存在四方对称性(使四次轴沿着 z 轴),故张量 λ_{iklm} 不同分量数目的限制为以下六个:

$$\lambda_{xxxx},\quad \lambda_{zzzz},\quad \lambda_{xxzz},\quad \lambda_{xxyy},\quad \lambda_{xyxy},\quad \lambda_{xzxz}.$$

绕 x 轴和 y 轴旋转 90°,分别给出变换:$x\to x,y\to -z,z\to y$ 和 $x\to z,y\to y,z\to -x$. 由此,在所写出的六个分量中,第一和第二,第三和第四,第五和第六分别相等. 于是,总共剩下三个不同的弹性模量. 立方晶系晶体自由能的形式为①:

$$F=\frac{1}{2}\lambda_{xxxx}(u_{xx}^2+u_{yy}^2+u_{zz}^2)+\lambda_{xxyy}(u_{xx}u_{yy}+u_{xx}u_{zz}+u_{yy}u_{zz})+2\lambda_{xyxy}(u_{xy}^2+u_{xz}^2+u_{yz}^2).\qquad(10.10)$$

现在,我们再一次写出各类晶系独立参数(弹性模量或确定各类晶系晶体轴方向的角度)的数目:

三斜晶系 ………………………………… 21
单斜晶系 ………………………………… 13

---

① 立方晶系 T 和 T_d 没有四次轴. 但是,在这种情形下,用研究三次轴的方法可以得到同样的结果,即绕三次轴旋转依次转换 x,y,z 轴两次.

译者补注:上述注释系指坐标轴取在立方晶体的三个棱边上,而相对顶点的对角线就是一个三次轴,绕三次轴旋转 120°正好是 x,y,z 轴的一次置换.

正交晶系………………………………… 9
四方晶系(C_4, S_4, C_{4h}) …………………… 7
四方晶系(C_{4v}, D_{2d}, D_4, D_{4h}) ……………… 6
三方晶系(C_3, S_6) ……………………… 7
三方晶系(C_{3v}, D_3, D_{3d}) …………………… 6
六方晶系………………………………… 5
立方晶系………………………………… 3

对于所有各类晶系，同样可以通过适当的选择坐标轴得到最小的不为零的模量数目：

三斜晶系 ……………………………… 18
单斜晶系 ……………………………… 12
正交晶系………………………………… 9
四方晶系………………………………… 6
三方晶系………………………………… 6
六方晶系………………………………… 5
立方晶系………………………………… 3

自然，上面所有的叙述都是对于单晶体的．至于多晶的物体，当包含在它们内部的晶体成分的尺寸足够小时，可以作为各向同性物体来考虑（因为我们所关心的形变区域远大于晶体的尺寸）．像所有各向同性物体一样，多晶体总共用两个弹性模量来表述．骤然看来，可能认为这两个模量可以由各个晶体的弹性模量利用简单地平均得到．但是，事实上并非如此．如果把多晶体的形变考虑为包含在它内部的晶体形变的结果，则原则上应该对所有这些晶体，按照在它们分界面上相应的边界条件求解平衡方程．由此可见，在整体上研究晶体的弹性性质和由它组成的物体的弹性性质之间的关系，取决于晶体的具体形状，也取决于晶体相互取向之间的关系．因此，多晶体弹性模量与（同样材料的）单晶体弹性模量之间不存在普遍的依存关系．

若用单晶体的弹性模量来计算各向同性多晶体的弹性模量，只有在单晶体的弹性性质为弱各向异性情形时才可能得到颇高的精确度[1]．在第一次近似时，多晶体的弹性模量可以简单的取其等于单晶体弹性模量的“各向同性部分”．于是，在后面的近似中，会出现单晶体模量弱“各向异性部分”的二次项，已发现该修正项既不取决于晶体的形状，也不取决于晶体的取向，并能用一般形式计算出来[2]．

---

[1] 比如，立方晶体弹性性质各向异性的程度是差 $\lambda_{xxxx}-\lambda_{xxyy}-2\lambda_{xyxy}$，如果它等于零，则表达式(10.10)退化为各向同性物体弹性能表达式(4.3)．

[2] 见栗弗席兹、劳捷次维格．实验物理和理论物理杂志(ЖЭТФ)，1946，16：967 页．

最后，让我们来研究晶体的热膨胀. 在各向同性物体中，沿着所有的方向发生的热膨胀都是相同的. 因而，在自由热膨胀时，应变张量具有如下形式（见§6）：

$$u_{ik} = \frac{1}{3}\alpha(T - T_0)\delta_{ik},$$

式中 α 是热膨胀系数. 在晶体中必须写成

$$u_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{3}(T - T_0), \tag{10.11}$$

式中 α_{ik} 是关于指标 i,k 对称的二阶张量（称为**热膨胀系数张量**）. 现在我们来说明，在各晶系的晶体中，张量 α_{ik} 不同独立分量的个数. 为此，最简单的方法就是全部利用张量代数已有的知识. 如通常所说的，所有的二阶对称张量都能够变换到某个相应的张量椭球状态[①]. 若直接从对称性考虑，很明显，在三斜晶系，单斜晶系和正交晶系的情形，一般来说是个三轴对称椭球（亦即它们的三个轴长都是不相同的）. 而在四方晶系，三方晶系和六方晶系的情形，则应该是个回转对称椭球（相应的回转轴沿着 C_4，C_3 或 C_6 的对称轴）. 最后，立方晶系的对称关系，使椭球退化为一个球. 但是，三轴椭球由三个独立的量（轴的长度）确定，回转椭球由两个轴长确定，而球总共只有一个量（半径）即可确定. 这样一来，在不同系列的晶体中，张量 α_{ik} 的独立分量的个数分别为：

三斜晶系，单斜晶系，正交晶系…………… 3
四方晶系，三方晶系，六方晶系…………… 2
立方晶系……………………………………… 1

上面第一行的三类晶系称为双轴晶系，而第二行的三类晶系称为单轴晶系. 我们注意到，立方晶系晶体的热膨胀总共只有一个量即可确定，亦即在热膨胀性质方面，它们的行为和各向同性物体的热膨胀一样.

习　题

习题 1 试借助于弹性模量 λ_{iklm}，用直角坐标 x,y,z 表示六方晶体的弹性能（取 x 轴沿着晶体的六次轴）.

解：在任意的（非正交的）坐标变换时，必须区分矢量和张量的分量是逆变的还是协变的，第一个（逆变分量，通常用上标表示）变换和坐标 x^i 本身的变换一样. 而第二个（协变分量，用下标表示）变换和微分算子 $\partial/\partial x^i$ 的变换一样. 这时，标量式（10.1）应写为

$$F = \lambda_{iklm}u^{ik}u^{lm}.$$

在表达式（10.8），（10.9）中，将分量 u_{ik} 变为逆变分量. 因此，为了建立张量 λ_{iklm} 的分

① 张量椭球由方程 $\alpha_{ik}x_ix_k = 1$ 确定.

量在坐标 ξ,η,z 和 x,y,z 之间的关系，必须把它们考虑为协变分量（自然，在直角坐标系中，逆变分量和协变分量是一样的）．对于式（10.7）进行变换，我们有

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \eta}\right).$$

将分量 λ_{iklm} 作为这些算子的乘积进行变换，得到

$$\lambda_{xxxx}=\lambda_{yyyy}=4\lambda_{\xi\eta\xi\eta}+2\lambda_{\xi\xi\eta\eta},\quad \lambda_{xyxy}=2\lambda_{\xi\xi\eta\eta},$$
$$\lambda_{xxyy}=4\lambda_{\xi\eta\xi\eta}-2\lambda_{\xi\xi\eta\eta},\quad \lambda_{xxzz}=\lambda_{yyzz}=2\lambda_{\xi\eta zz},$$
$$\lambda_{xzxz}=\lambda_{yzyz}=2\lambda_{\xi z\eta z}.$$

因此，自由能表达式（10.9）可以用上面的模量表示为如下形式：

$$F=\frac{1}{2}\lambda_{xxxx}(u_{xx}+u_{yy})^2+\frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2+\lambda_{xxzz}(u_{xx}+u_{yy})u_{zz}+$$
$$+2\lambda_{xzxz}(u_{xz}^2+u_{yz}^2)+(\lambda_{xxxx}-\lambda_{xxyy})(u_{xy}^2-u_{xx}u_{yy}).$$

习题 2　试求出立方晶体的弹性能为正的条件．

解：式（10.10）的前两项由三个独立变量 u_{xx},u_{yy},u_{zz} 的二次型组成．该式为正的条件要求它单个子式的系数行列式和 λ_{xxxx} 的系数为正．此外，式（10.10）的第三项必须为正．这些条件得出如下不等式：

$$\lambda_1>0,\quad \lambda_3>0,\quad -\frac{\lambda_1}{2}<\lambda_2<\lambda_1,$$

式中记号 $\lambda_1=\lambda_{xxxx},\lambda_2=\lambda_{xxyy},\lambda_3=\lambda_{xyxy}$.

习题 3　试确定立方晶体的拉伸模量与其方向之间的关系．

解：把坐标轴选在立方晶体的棱边上．假设从晶体上切取的杆，其轴具有单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向．当拉伸杆时，应力张量必须满足如下的条件：$\sigma_{ik}n_k=pn_i$，其中 p 为作用在杆两端单位面积上的拉力（在杆两端面上的条件）；对于垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的 $\boldsymbol{t}$ 方向，必须有 $\sigma_{ik}t_k=0$（在杆侧面上的条件）．这样的张量必然具有 $\sigma_{ik}=pn_in_k$ 的形式．由对表达式（10.10）取导数来计算分量 σ_{ik}①，并与表达式 $\sigma_{ik}=pn_in_k$ 相比较，则得到应变张量分量的表达式：

$$u_{xx}=p\frac{(\lambda_1+2\lambda_2)n_x^2-\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+2\lambda_2)},\quad u_{xy}=p\frac{n_xn_y}{2\lambda_3}.$$

对于其余的分量可以类似地求出．

细杆纵向的相对伸长为 $u=\dfrac{\mathrm{d}\,l'-\mathrm{d}\,l}{\mathrm{d}\,l}$，其中 $\mathrm{d}\,l'$ 由公式（1.2）和 $\dfrac{\mathrm{d}\,x_i}{\mathrm{d}\,l}=n_i$ 给出，对于小形变，$u=u_{ik}n_in_k$．杨氏模量定义为 $p=Eu$ 的比例系数，并求得

---

① 如果不是直接用公式 $\sigma_{ik}=\lambda_{iklm}u_{lm}$ 来计算 σ_{ik}，而是用 F 的具体表达式的微分来计算 σ_{ik}，则对 u_{ik} 的导数在 $i\neq k$ 时给出二倍于 σ_{ik} 的值．这是因为按实质意义说，公式 $\sigma_{ik}=\partial F/\partial u_{ik}$ 只是作为表示 $\mathrm{d}\,F=\sigma_{ik}\mathrm{d}u_{ik}$ 那样的事实，但是，在 $\sigma_{ik}\mathrm{d}u_{ik}$ 的和中，带有微分 $\mathrm{d}u_{ik}$ 的每一个 $i\neq k$ 分量的项，对称张量 u_{ik} 出现了两次．

$$\frac{1}{E}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{(\lambda_1+2\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)}+\left(\frac{1}{\lambda_3}-\frac{2}{\lambda_1-\lambda_2}\right)(n_x^2n_y^2+n_x^2n_z^2+n_y^2n_z^2).$$

模量在棱边(轴 x,y,z)方向和立方体空间对角线方向上具有极值. 在沿着立方体棱边的方向上

$$E=(\lambda_1+2\lambda_2)\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

这时,细杆的横向压缩 $u_{xx}=u_{yy}=-\sigma u_{zz}=-\sigma u$,其中 $\sigma=\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$起着泊松比的作用. 根据在前面习题中得到的不等式: $-1<\sigma<1/2$.

第二章

杆和板的平衡

§11　弯曲板的能量

在这一章里，我们将致力于研究形变物体平衡的某些特殊情形，并且首先研究薄板的形变. 我们所说的薄板，指的是板厚度远小于其它两个方向的尺寸. 像以前说的一样，我们仍然假设形变本身是小的. 在这里的情形，形变小的标准是板上各点的位移均较板的厚度为小①.

一般平衡方程在应用于薄板时被极大的简化了. 但是，最方便的不是直接由一般方程导出这些简化的方程，而是重新计算弯曲板的自由能，然后求这个能量的变分.

板弯曲时，在板内部的一些地方发生拉伸，在另外一些地方发生压缩，即在板凸出的一面发生拉伸，随着向板内深度方向的增加，拉伸逐渐地减小，最终达到了零，此后，从下一层开始，压缩逐渐地增加. 因而，在板的内部存在着一个**中性面**. 在中性面上根本不存在拉伸或压缩，而在中性面的两边，形变具有相反的符号. 很明显，这个中性面位于板厚度的中间.

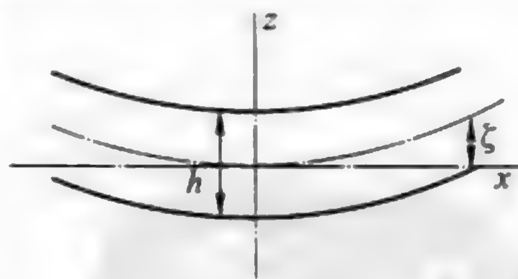


图 2

选取坐标系，坐标原点放在中性面上的任何一点，z 轴沿着中性面的法线方向，而 xy 平面与未形变的板面(中面)相重合. 中性面上点的垂直位移，即它们的 z 坐标，我们用字母 ζ 表示(图 2). 至于谈到这些点在 xy 平面内的位移分量，则很明

---

① 假如分别用 h、l、ζ 表示板的厚度、中面的特征尺寸(如边长、直径等)和挠度，则薄板要求 $h \ll l$. 从工程实际和计算精度要求看，一般来说，当 $h/l \leqslant 1/5$ 时可以按薄板计算. 薄板的小挠度理论要求 ζ 比 h 要小的多，当 ζ 与 h 为同一数量级时就必须采用大挠度理论(详见 §14). ——译者注

显,与 ζ 相比它们是二阶小量,因此可以假设它们等于零. 这样一来,中性面上点的位移矢量为

$$u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0, \quad u_z^{(0)} = \zeta(x,y). \tag{11.1}$$

为了更进一步的计算,关于形变板内作用的应力必须作以下说明. 因为是薄板,所以,为了使它弯曲,只需要对它的表面附加不大的力即可. 在任何情况下,这些力与由于形变板内部存在的拉伸和压缩而产生的应力相比较都是很小的. 因此,在边界条件(2.9)中,可以忽略力 P_i,所以剩下 $\sigma_{ik}n_k = 0$. 因为板的弯曲是小的,所以,可以假设法矢量 $\boldsymbol{n}$ 沿着 z 轴方向. 这样一来,在板的两个表面上应有:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

但是,因为板的厚度小,这些量在板的两个侧表面上都等于零,所以它们在板的内部也应该是小的. 因而,我们可以得出结论:在整个板内,分量 $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ 与应力张量的其余分量相比较都是不大的. 据此,我们可以假定它们都等于零. 并且由这些条件确定应变张量.

根据一般公式(5.13)有

$$\sigma_{zx} = \frac{E}{1+\sigma}u_{zx}, \quad \sigma_{zy} = \frac{E}{1+\sigma}u_{zy},$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx} + u_{yy})]. \tag{11.2}$$

由这些表达式等于零求出

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}(u_{xx} + u_{yy}).$$

在前两个方程中,可以足够精确地用 $\zeta(x,y)$ 代换 u_z:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

由此

$$u_x = -z\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad u_y = -z\frac{\partial \zeta}{\partial y}. \tag{11.3}$$

置积分常数等于零,是因为当 $z=0$ 时,有 $u_x = u_y = 0$. 知道 u_x, u_y 后,就可以确定应变张量的所有分量:

$$u_{xx} = -z\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad u_{yy} = -z\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \quad u_{xy} = -z\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y},$$

$$u_{xz} = u_{yz} = 0, \quad u_{zz} = \frac{\sigma}{1-\sigma}z\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right). \tag{11.4}$$

现在就可以利用一般公式(5.10)计算板在单位体积的自由能 F 了. 经过简单地计算即可得到它的表达式:

$$F = z^2 \frac{E}{1+\sigma}\left\{\frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right\}. \tag{11.5}$$

板的总自由能，可以由上式遍及板的全部体积进行积分得到. 在沿 z 积分时，积分限由 $-h/2$ 到 $+h/2$，其中，h 为板的厚度；而沿 x 和沿 y 进行积分时，积分域是整个板面. 最后求出形变板的总自由能 $F_{pl} = \int F\mathrm{d}V$ 的形式：

$$F_{pl} = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{11.6}$$

(鉴于形变是小量，可以足够精确地将面元简单地写为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$).

在得到自由能表达式之后，可以把板当作没有厚度，即作为几何上的面来研究. 因为我们关心的只是在附加力影响下它具有的形状，而不是形变在板内的分布. 量 ζ 是当把板作为面来考虑进行弯曲时其上各点的位移.

§12　板的平衡方程

我们现在按自由能极小值条件来推导板的平衡方程. 为此需要计算表达式(11.6)的变分.

将式(11.6)中的积分分为两个积分之和，并且对于其中的每一个取变分. 第一个积分可以写为

$$\int(\nabla^2\zeta)^2\mathrm{d}f,$$

式中 $\mathrm{d}f=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为面元，而 $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ 在这里(以及 §12－14 各处)表示二维拉普拉斯算子. 对该积分取变分，有

$$\delta\frac{1}{2}\int(\nabla^2\zeta)^2\mathrm{d}f = \int\nabla^2\zeta\,\nabla^2\delta\zeta\mathrm{d}f = \int\nabla^2\zeta\,\nabla\cdot\nabla\,\delta\zeta\mathrm{d}f =$$

$$= \int\nabla\cdot(\nabla^2\zeta\,\nabla\,\delta\zeta)\mathrm{d}f-\int(\nabla\,\delta\zeta)\cdot\nabla\nabla^2\zeta\mathrm{d}f.$$

自然，这里所有的矢量运算都是在二维坐标系 xy 内进行的. 将上式右边的第一个积分变换为包围板面的闭路周线积分①：

$$\int\nabla\cdot(\nabla^2\zeta\,\nabla\,\delta\zeta)\mathrm{d}f = \oint\nabla^2\zeta(\boldsymbol{n}\cdot\nabla\,\delta\zeta)\mathrm{d}l = \oint\nabla^2\zeta\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}\mathrm{d}l,$$

式中 $\partial/\partial n$ 表示沿边界外法线方向的导数. 对第二个积分应用同样的变换，我们

---

① 精确地把二维积分公式变换为类似的三维公式. 体元 $\mathrm{d}V$ 现在起着面元 $\mathrm{d}f$ 的作用(和研究标量一样)，而代替面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 的是周线上的线元 $\mathrm{d}l$ 乘以周线外法矢量 $\boldsymbol{n}$. 用 $n_i\mathrm{d}l$ 代换 $\mathrm{d}f\partial/\partial x_i$ 实现把按 $\mathrm{d}f$ 的积分变换为按 $\mathrm{d}l$ 的积分. 这样，如果 φ 是某个标量，则 $\int\nabla\varphi\mathrm{d}f=\oint\varphi\boldsymbol{n}\mathrm{d}l$.

得到

$$\int(\nabla\delta\zeta)\cdot\nabla\nabla^2\zeta\mathrm{d}f=\int\nabla\cdot(\delta\zeta\,\nabla\nabla^2\zeta)\mathrm{d}f-\int\delta\zeta\,\nabla^4\zeta\mathrm{d}f=$$

$$=\oint\delta\zeta(\boldsymbol{n}\cdot\nabla\nabla^2\zeta)\mathrm{d}l-\int\delta\zeta\,\nabla^4\zeta\mathrm{d}f=\oint\delta\zeta\frac{\partial\,\nabla^2\zeta}{\partial n}\mathrm{d}l-\int\delta\zeta\,\nabla^4\zeta\mathrm{d}f.$$

将所得到的结果代入原式即得到

$$\delta\frac{1}{2}\int(\nabla^2\zeta)^2\mathrm{d}f=\int\delta\zeta\,\nabla^4\zeta\mathrm{d}f-\oint\delta\zeta\frac{\partial\,\nabla^2\zeta}{\partial n}\mathrm{d}l+\oint\nabla^2\zeta\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}\mathrm{d}l.\tag{12.1}$$

在(11.6)中第二个积分之变分的变换要更长一点. 这个变换不是矢量形式,而是分量形式,这样更便于推导. 于是我们有

$$\delta\int\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}\mathrm{d}f=\int\left\{2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}\mathrm{d}f.$$

这里的被积分表达式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right),$$

即它如同某个矢量的二维散度一样. 因此能够把变分重新写为闭路周线积分:

$$\delta\int\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}\mathrm{d}f=\oint\mathrm{d}l\sin\theta\left\{\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right\}+$$

$$+\oint\mathrm{d}l\cos\theta\left\{\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}.\tag{12.2}$$

式中 θ 是 x 轴与周线外法矢量 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角(图 3).

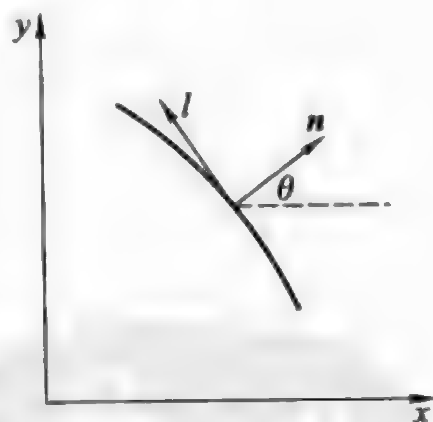


图 3

根据公式

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial n}-\sin\theta\frac{\partial}{\partial l},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial n}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial l}.$$

将 $\delta\zeta$ 对 x 和 y 的导数,用对边界的法向 $\boldsymbol{n}$ 的导数和切向 $\boldsymbol{l}$ 的导数表示. 于是,公式(12.2)中的积分具有下面的形式:

$$\delta\int\{\cdots\}\mathrm{d}f=\oint\mathrm{d}l\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}\left\{2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}-\sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}+$$

$$+\oint\mathrm{d}l\frac{\partial\delta\zeta}{\partial l}\left\{\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right\}.$$

第二个积分可以对它取分部积分计算出来. 因为是沿闭路周线取积分,积分限合并为同一个点,因此,我们很容易得到:

$$-\oint \mathrm{d}l\delta\zeta \frac{\partial}{\partial l}\left\{\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right\}.$$

把所有的表达式综合在一起，并按公式(11.6)写出系数，最终得到下面的自由能变分表达式：

$$\delta F_{\mathrm{pl}} = D\Big\{\int \nabla^4\zeta\delta\zeta\mathrm{d}f-\oint\delta\zeta\mathrm{d}l\Big[\frac{\partial\nabla^2\zeta}{\partial n}+$$
$$+(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left(\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)\Big]+$$
$$+\oint\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}\mathrm{d}l\Big[\nabla^2\zeta+(1-\sigma)\left(2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}-\sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\Big]\Big\},\tag{12.3}$$

式中

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}.\tag{12.4}$$

为了由此获得板的平衡方程，必须使变分 δF 与板的势能变分 δU 之和等于零，而板的势能与作用在板上的外力有关. 这个后面的变分等于板位移时的外力功并取相反的符号. 设 P 是作用于板表面单位面积上的外力①，其方向沿着表面的法线. 于是，当板上各点位移 $\delta\zeta$ 时，力所做的功为

$$\int P\delta\zeta\mathrm{d}f.$$

这样一来，作为板的总自由能为最小值的条件，我们有方程

$$\delta F_{\mathrm{pl}}-\int P\delta\zeta\mathrm{d}f=0.$$

在这个等式左边部分，即有面积分又有闭路周线积分. 面积分是

$$\int\{D\nabla^4\zeta-P\}\delta\zeta\mathrm{d}f.$$

在这个积分中，变分是任意的. 因此要积分等于零，只有 $\delta\zeta$ 前面的系数为零，故

$$D\nabla^4\zeta=P.\tag{12.5}$$

这就是在外力作用下弯曲板的平衡方程. 在该方程前面的系数称为板的**抗弯刚度**.

上面这个方程的边界条件可以由式(12.3)中的闭路周线积分等于零得出. 这里我们须研究几种不同的特殊情况.

假设板边缘的一部分是自由的，亦即在这部分没有作用任何外力. 这样，在边缘的这部分变分 $\delta\zeta$ 和 $\delta(\partial\zeta/\partial n)$ 是任意的，于是闭路周线积分中在这两个变分

---

① 这里，力 P 可以是体力（如重力）作用的结果，等于体力沿板厚度的积分.

前边的系数必须等于零. 这便得到两个方程:

$$-\frac{\partial\nabla^2\zeta}{\partial n}+(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left\{\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)+(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right\}=0, \tag{12.6}$$

$$\nabla^2\zeta+(1-\sigma)\left\{2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}-\sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}=0. \tag{12.7}$$

在板的所有自由边上这两个方程必须成立.

边界条件(12.6),(12.7)是极其复杂的. 最简单的是板的边缘为“**固支**”或“**简支**”的情形. 如果板的边缘是固支的(图4(a)),则不能承受任何垂直的位移,此外,这些边缘的方向同样也不能改变. 在板边缘的这部分上,相对于初始位置旋转的角度等于(在 ζ 是小位移时)导数 $\partial\zeta/\partial n$. 这样一来,在板的固支边上,变分 $\delta\zeta$ 和 $\delta(\partial\zeta/\partial n)$ 等于零. 于是,式(12.3)中的闭路周线积分恒为零. 在这种情形下,边界条件具有简单的形式:

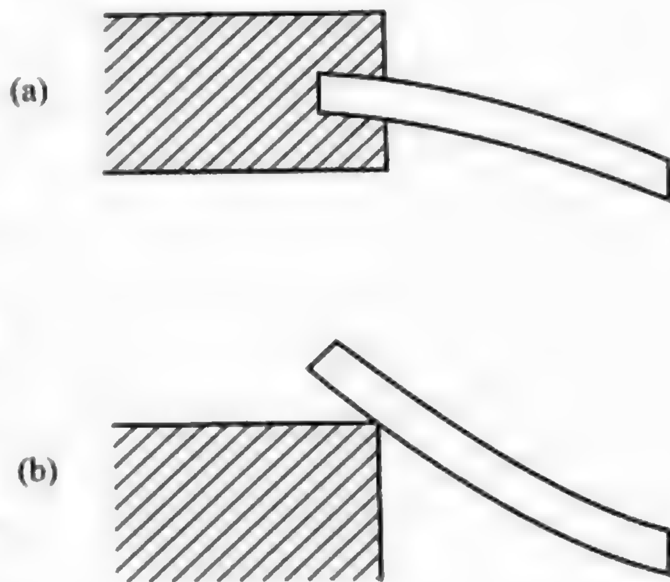


图 4

$$\zeta=0,\ \frac{\partial\zeta}{\partial n}=0. \tag{12.8}$$

上面的第一式,实际上表示形变时在板的边缘根本就不承受垂直位移;而第二式,实际上表示在边缘上板仍然保持水平方向.

不难确定固定点处从支座作用在板上的反作用力. 这个力与板对支座作用的力大小相等方向相反. 从一般力学已知,某个方向的作用力等于能量沿该方向对坐标的导数. 例如,板对支座作用的力由能量对板边缘位移 ζ 的导数确定,取负号;而反作用力,等于同样的导数,取正号. 但是,这个导数不是别的,正是式(12.3)中第二个积分 $\delta\zeta$ 前面的系数. 这样一来,相对于边界单位长度的反作用力,等于方程(12.6)左面的表达式(当然,现在不等于零)乘以 D. 类似的,反作用力矩,由方程(12.7)左面的表达式乘以同样的系数 D 确定. 这个结果由一般力学已知:力矩等于能量对物体旋转角的导数. 板边缘处的旋转角等于导数 $\partial\zeta/\partial n$,于是,相应的力矩由式(12.3)第三个积分中 $\delta(\partial\zeta/\partial n)$ 前面的系数确定. 在这种情况下,这两个表达式(对于力和力矩的)由于条件(12.8)而极大的简化了. 就是说,由于 ζ 和 $\partial\zeta/\partial n$ 沿板边缘的整个周线处处等于零,所以它沿切向 $\boldsymbol{l}$ 方向的各阶导数也都恒等于零. 考虑到这一情况,在式(12.6)和(12.7)中,将关于 x 和 y 的导数换成关于 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{l}$ 方向的导数,即

得到支座的反作用力 F 和反作用力矩 M 的如下简单表达式：

$$F = -D\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial n^3} + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2}\right], \tag{12.9}$$

$$M = D\frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2}. \tag{12.10}$$

另一个重要的情形就是**简支板**(图 4(b)),在简支板的边缘仅仅是支撑在固定不动的支座上,但是没有把它夹紧. 在这样的情形下,在板的周边上(也就是支座支撑板的那条线上)没有以前所说的垂直位移,但决不保持方向不变. 据此,在式(12.3)沿闭路周线的积分中

$$\delta\zeta = 0,$$

但是

$$\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n} \neq 0.$$

因此,两个条件(12.6)和(12.7),只剩下了第二个. 和前面的情形一样,在板的支撑点上的反作用力,也由位于式(12.6)左面的表达式确定(这些力的力矩在平衡时也等于零). 如果把导数化为沿着 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{l}$ 方向的导数,考虑到,由于在整个周边上 $\zeta = 0$,导数 $\partial\zeta/\partial l$ 和 $\partial^2\zeta/\partial l^2$ 也等于零,则边界条件(12.7)将被简化. 最后得到如下形式的边界条件:

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2} + \sigma\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0. \tag{12.11}$$

习　　题

习题 1　试确定固支边圆板(半径 R)在重力场中水平放置时的形变.

解:取极坐标,原点置于板的中心. 作用在板面单位面积上的力为 $P = \rho hg$,方程(12.5)具有如下形式:

$$\nabla^4\zeta = 64\beta, \quad \beta = \frac{3\rho g(1-\sigma^2)}{16h^2E}$$

(正的 ζ 与重力作用的方向一致). 因为 ζ 只是 r 的函数,所以在极坐标中 ∇^2 必须写为 $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$. 这个方程的一般积分是

$$\zeta = \beta r^4 + ar^2 + b + cr^2\ln\frac{r}{R} + d\ln\frac{r}{R}.$$

在本题的情形,必须置 $d = 0$,这是因为,在 $r = 0$ 时,$\ln\frac{r}{R}$ 变为无穷大;同样,$c = 0$,这是因为,在 $r = 0$ 时,该项使 $\nabla^2\zeta$ 成为奇点(这相当于将力附加在板的中心,见习题 3). 常数 a 和 b,由边界条件 $r = R$ 时,$\zeta = 0$,$\partial\zeta/\partial r = 0$ 来确定. 最后

得到：

$$\zeta=\beta(R^2-r^2)^2.$$

习题 2 同习题 1，对简支边圆板求解.

解：在圆板情形下，边界条件(12.11)具有如下形式：

$$\zeta=0,\quad \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r}+\frac{\sigma}{r}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r}=0.$$

类似于习题 1 的解法，可导出下面的结果：

$$\zeta=\beta(R^2-r^2)\left(\frac{5+\sigma}{1+\sigma}R^2-r^2\right).$$

习题 3 试确定固支边圆板在板的中心附加力 f 时的形变.

解：除坐标原点外，处处都存在方程

$$\nabla^4\zeta=0,$$

积分后得到

$$\zeta=ar^2+b+cr^2\ln\frac{r}{R}$$

(又有带 $\ln r$ 的项，删去). 作用在板上的总力等于附加于板中心的力 f，因此 $\nabla^4\zeta$ 遍及板面的积分应为

$$2\pi\int_0^R r\,\nabla^4\zeta\mathrm{d}r=\frac{f}{D}.$$

由此得到 $c=f/(8\pi D)$. 常数 a 和 b 由边界条件确定，最后得到：

$$\zeta=\frac{f}{8\pi D}\left[\frac{1}{2}(R^2-r^2)-r^2\ln\frac{R}{r}\right].$$

习题 4 同习题 3，对简支边圆板求解.

答案：

$$\zeta=\frac{f}{16\pi D}\left[\frac{3+\sigma}{1+\sigma}(R^2-r^2)-2r^2\ln\frac{R}{r}\right].$$

习题 5 试确定处于重力场的圆板在板的中心悬挂时的形变.

解：关于 ζ 的方程和它的一般解与习题 1 一样，因为在板的中心位移 $\zeta=0$，故 $c=0$. 常数 a 和 b 由边界条件(12.6)和(12.7)确定，在圆对称时有如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}\,\nabla^2\zeta}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r}\right)=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\sigma}{r}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r}=0.$$

最后得到

$$\zeta=\beta r^2\left[r^2+8R^2\ln\frac{R}{r}+2R^2\frac{3+\sigma}{1+\sigma}\right].$$

习题 6 对物体施加外力，克服撕裂表面上作用的表面张力，从物体上撕开

一个薄层(厚度为 h). 在给定外力的情形下,当撕裂表面具有一定的大小和撕裂板具有一定的形状时确立了平衡(图 5). 试推出联系表面张力大小与撕裂板形状的公式.

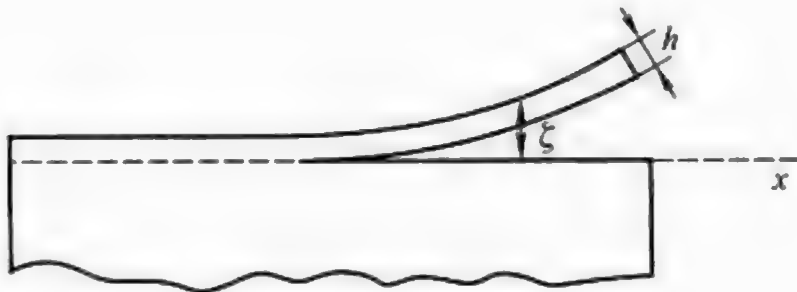


图 5

解:将撕裂层作为板来考虑,其中一个边(撕裂的线缝处)被夹紧. 作用在这个边上的弯矩由公式(12.10)确定. 当撕裂部分伸长 δx 时,该弯矩所作的功为

$$M\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}=M\delta x\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=D\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2\delta x \tag{1}$$

(弯曲力 F 做的功是二阶小量). 平衡条件是弯矩之功等于系统能量的改变. 系统能量的改变由两部分形成:表面能的改变和撕裂板弹性能的改变,后者是由于板弯曲部分的伸长引起的. 第一部分等于 $2\alpha\delta x$,其中 α 为表面张力系数,因子 2 是考虑到撕裂时产生两个自由表面. 而第二部分等于

$$\left[\frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)}\right]\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2\delta x$$

(能量式(11.6)应用于板的长度 δx 上),即由式(1)中功的一半组成. 于是得到:

$$\alpha=\frac{D}{4}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2.$$

§ 13　板的纵向形变

纵向形变是薄板形变的特殊形式,它发生在板平面内,而没有伴随弯曲. 现在我们来推导描述这种形变的平衡方程.

如果板足够薄,则沿着板厚度的形变可以认为是均匀的. 这时,应变张量只是 x 和 y 的函数(选择板平面为 xy 平面),而与 z 无关. 板的纵向形变通常是由于附加在板边缘上的力或由于板平面内作用的体力引起的. 此时,在板的两个表面上的边界条件为:$\sigma_{ik}n_k=0$. 又由于法矢量与 z 轴方向相同,故有 $\sigma_{iz}=0$,即

$$\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=\sigma_{zz}=0.$$

但是,应该指出,在下述的近似理论中,即使是拉伸外力直接附加于板的表面上,上述的这些条件仍然是有效的,因为这些力与板内的**纵向应力**($\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy}$)相比较全部都是小量. 由于在边界上 $\sigma_{xz},\sigma_{yz},\sigma_{zz}$ 等于零,故而在整个板的小厚度之间,它们也将是小量. 因此我们可以近似的认为在板的整个体积内这些量都等于零.

令表达式(11.2)等于零,得到如下关系:

$$u_{zz}=-\frac{\sigma}{1-\sigma}(u_{xx}+u_{yy}),\quad u_{xz}=u_{yz}=0. \tag{13.1}$$

将它们代入一般公式(5.13),即得到应力张量,其不为零的分量为

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\frac{E}{1-\sigma^2}(u_{xx}+\sigma u_{yy}),\\ \sigma_{yy}&=\frac{E}{1-\sigma^2}(u_{yy}+\sigma u_{xx}),\\ \sigma_{xy}&=\frac{E}{1+\sigma}u_{xy}.\end{aligned} \tag{13.2}$$

注意,借助于形式代换

$$E\to\frac{E}{1-\sigma^2},\quad \sigma\to\frac{\sigma}{1-\sigma}. \tag{13.3}$$

上述表达式就变为平面形变[①]时确定应力 $\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yy}$ 和应变 u_{xx},u_{xy},u_{zz} 之间关系的公式(由公式 (5.13),置 $u_{zz}=0$).

这样一来,在完全消去位移 u_z 后,我们就可以简单地把板视为一个没有厚度的二维介质(**弹性平面**)来研究,或者说,位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 是只具有两个分量 u_x 和 u_y 的二维矢量. 如果 P_x 和 P_y 是在板的单位面积上的体力分量,则一般平衡方程为

$$h\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}\right)+P_x=0,$$

$$h\left(\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}\right)+P_y=0.$$

将表达式(13.2)代入上式即得到如下形式的平衡方程:

$$Eh\left[\frac{1}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}+\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2u_x}{\partial y^2}+\frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2u_y}{\partial x\partial y}\right]+P_x=0,$$

---

① 弹性平面问题通常分为两类,一类是平面应变,系指在§7最后两段的论述;另一类就是平面应力,即本节的内容. 两类问题的基本方程是一致的,不同的只是物理关系前面的系数,通过所给出的代换即可把平面应力的物理关系转变成平面形变的物理关系,当然也可以由式(5.13)置 $u_{zz}=0$ 直接得到.

——译者注

$$Eh\left[\frac{1}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}\right]+P_y=0. \qquad (13.4)$$

这组方程可以写为二维矢量形式：

$$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}-\frac{1-\sigma}{2}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{P}\frac{1-\sigma^2}{Eh}. \qquad (13.5)$$

式中所有的矢量算子，都应理解为二维算子.

特别是，在没有体力时平衡方程为

$$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}-\frac{1-\sigma}{2}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}=0. \qquad (13.6)$$

上述方程与沿物体 z 轴方向无限的平面形变之平衡方程（§7）①的区别只是系数值不同（按式(13.3)代换）. 像对平面形变一样，这里也可以引入由如下关系确定的应力函数：

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2},\quad \sigma_{xy}=-\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y},\quad \sigma_{yy}=\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}. \qquad (13.7)$$

它们自动满足写为如下形式的平衡方程：

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=0.$$

因为对于 $\nabla^2\chi$ 有关系式：

$$\nabla^2\chi=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=\frac{E}{1-\sigma}(u_{xx}+u_{yy})=\frac{E}{1-\sigma}\nabla\cdot\boldsymbol{u}.$$

该式与已有的平面形变的区别，只是式中的因子不同. 所以，像以前一样，应力函数满足重调和方程（见§7）.

这里我们指出下面的情况：当板由已知力附加于边缘而形变时，板中的应力分布与材料的弹性常数无关. 实际上，弹性常数既没有包含在应力函数满足的重调和方程中，也没有包含在用应力函数确定应力分量 σ_{ik} 的公式(13.7)中（因此也没有包含在板边缘的边界条件中）.

习　　题

习题 1　试确定围绕着通过圆盘中心并垂直于板面的轴作均匀旋转时平面圆盘的形变.

解：待求的解与§7 习题 5 得到的旋转圆柱体平面形变解之区别只是常系数的值不同. 径向位移 $u_r=u(r)$ 公式由下式给出：

---

① 当沿 z 轴形变均匀时，在整个物体内 $\sigma_{zx}=\sigma_{zy}=\sigma_{zz}=0$，这时，称为**平面应力状态**，以区别于平面形变，在平面形变时，整个物体内 $u_{zx}=u_{zy}=u_{zz}=0$.

$$u=\frac{\rho\Omega^2(1-\sigma^2)}{8E}r\left(\frac{3+\sigma}{1+\sigma}R^2-r^2\right).$$

该表达式就是在§7习题5得到的公式中按式(13.3)代换得到的.

习题2 试确定半无限大平板(具有直线边界),在板边缘一点上向板内施加集中力影响下的形变.

解:引入极坐标,极角 φ 从施加力的作用方向算起,它的取值范围从 $-(\pi/2+\alpha)$ 到 $\pi/2-\alpha$,其中 α 是力方向与板边缘法线间的夹角(图6). 在自由边上所有的点,除了施加外力的点(坐标原点)外,都必须实现 $\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{r\varphi}=0$ 的条件. 利用在§7习题11得到的应力 $\sigma_{\varphi\varphi}$ 和 $\sigma_{r\varphi}$ 的表达式,求出这些应力函数必须满足的条件:当 $\varphi=\mp\pi/2-\alpha$ 时,

$$\frac{\partial\chi}{\partial r}=\text{const},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}=\text{const}.$$

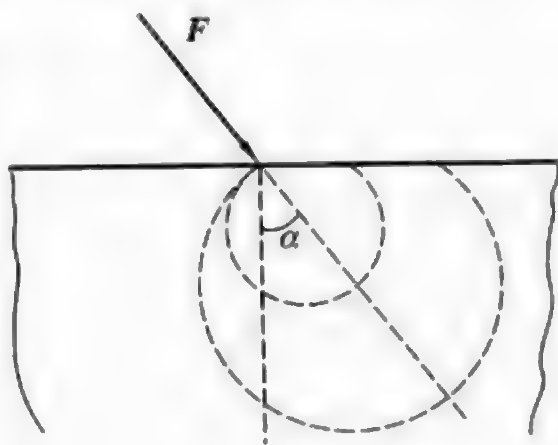


图6

如果 $\chi=rf(\varphi)$,上面这两个条件即可实现. 将其代入重调和方程

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{r^2\partial\varphi^2}\right]^2\chi=0.$$

对于 $f(\varphi)$,给出 $\sin\varphi,\cos\varphi,\varphi\sin\varphi,\varphi\cos\varphi$ 形式的解,它们中的前两个函数,导致应力恒等于零,由施加于坐标原点的正值力给出解:

$$\chi=-\frac{F}{\pi}r\varphi\sin\varphi,\quad \sigma_{rr}=-\frac{2F}{\pi}\frac{\cos\varphi}{r},\quad \sigma_{r\varphi}=\sigma_{\varphi\varphi}=0 \tag{1}$$

(F 是在板的单位厚度上作用的外力的大小). 实际上,在沿着以坐标原点为中心的小的半圆周上,将应力在平行和垂直于力 $\boldsymbol{F}$ 方向上的分量积分(然后就可以想象小圆的半径趋于零),即可得到:

$$\int\sigma_{rr}r\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=-F,\qquad \int\sigma_{rr}r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=0,$$

即,这个积分值恰好与施加于坐标原点的外力相抵消.

公式(1)确定了待求应力的分布. 它们是纯径向的:在任何一个垂直于半径的面积上只作用径向的压力. 等应力线是通过坐标原点,$r=d\cos\varphi$ 的圆周,而圆心在沿着力 $\boldsymbol{F}$ 作用的直线上(图6).

应变张量的分量:

$$u_{rr}=\frac{\sigma_{rr}}{E},\quad u_{\varphi\varphi}=-\frac{\sigma}{E}\sigma_{rr},\quad u_{r\varphi}=0.$$

由此积分(借助于表达式(1.8)对极坐标表示的分量 u_{ik}),即可求出位移矢量:

$$u_r=-\frac{2F}{\pi E}\cos\varphi\ln\frac{r}{a}-\frac{(1-\sigma)F}{\pi E}\varphi\sin\varphi,$$

$$u_\varphi = \frac{2\sigma F}{\pi E}\sin\varphi + \frac{2F}{\pi E}\ln\frac{r}{a}\sin\varphi + \frac{(1-\sigma)F}{\pi E}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

这里,积分常数是用这样的方法选择的：为了消除板的整体位移(移动或转动),预想在力的作用线上距离坐标原点 a 处,选择一个假定没有位移的点.

借助于所得到的解,可以建立在板边缘上作用任意分布力的问题的解(比较§8). 自然,在靠近坐标原点的附近它们是不适用的.

习题 3　试确定无限楔形板(顶角 2α)在顶点施加力作用下的形变.

解:确定应力分布的公式,与习题 2 得到的公式的区别只是规定不同. 如果力沿着楔形板的中间线作用(图 7 上的力 F_1),则有

$$\sigma_{rr} = -\frac{F_1\cos\varphi}{r\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)},\quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0.$$

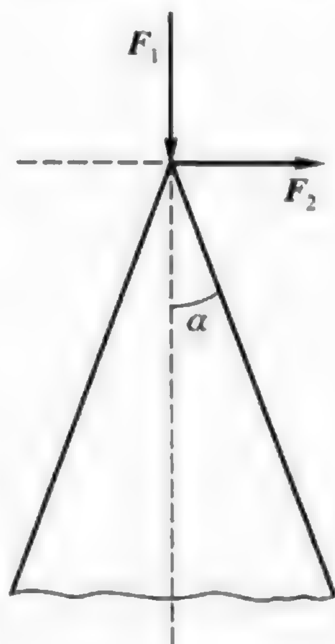


图 7

如果力作用于中间线的垂直方向上(图 7 上的力 F_2),则

$$\sigma_{rr} = -\frac{F_2\cos\varphi}{r\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)}.$$

上述两种情形的每一个,角 φ 都是从相应力的作用方向算起的.

习题 4　试确定圆盘(半径 R)在直径两端施加一对大小相等方向相反的力 Fh 压缩时的形变(图 8).

解:该问题的解可由三个分布应力的叠加求得. 其中两个分布应力是

$$\sigma^{(1)}_{r_1r_1} = -\frac{2F}{\pi}\frac{\cos\varphi_1}{r_1},\qquad \sigma^{(1)}_{r_1\varphi_1} = \sigma^{(1)}_{\varphi_1\varphi_1} = 0,$$

$$\sigma^{(2)}_{r_2r_2} = -\frac{2F}{\pi}\frac{\cos\varphi_2}{r_2},\qquad \sigma^{(2)}_{r_2\varphi_2} = \sigma^{(2)}_{\varphi_2\varphi_2} = 0,$$

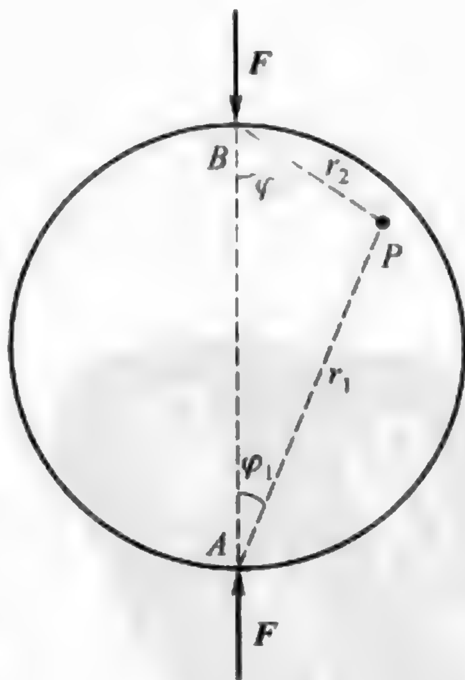


图 8

式中的 r_1, φ_1 和 r_2, φ_2 是任意一点 P 分别对应以 A 和 B 为原点的极坐标(上述这些应力是由施加于半平面边界一点上的法向力 F 产生的,见习题 2). 第三个分布应力是等强度的均匀拉伸:

$$\sigma^{(3)}_{ik} = \frac{F}{\pi R}\delta_{ik}.$$

实际上,如果 P 点置于圆板的周线上,则对于该点 $r_1 = 2R\cos\varphi_1$, $r_2 = 2R\cos\varphi_2$,于是

$$\sigma^{(1)}_{r_1r_1} = \sigma^{(2)}_{r_2r_2} = -\frac{F}{\pi R}.$$

因为,在该点 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的方向相互垂直,故我们看到,前面两组应力在圆盘的边缘上是均匀压缩,这个力正好抵消第三组的均匀拉伸. 于是得出,圆盘的边缘上呈现出没有应力的自由边界.

习题 5 试确定带有圆孔(半径 R)的无限板承受均匀拉伸时的应力分布.

解:无孔连续板的均匀拉伸对应的应力是 $\sigma_{xx}^{(0)}=T,\sigma_{yy}^{(0)}=\sigma_{xy}^{(0)}=0$,其中 T 为拉伸力. 它们相应的应力函数为

$$\chi^{(0)}=\frac{T}{2}y^2=\frac{T}{2}r^2\sin^2\varphi=\frac{1}{4}Tr^2(1-\cos 2\varphi).$$

存在圆孔(中心在极坐标 r,φ 的原点)时,我们寻求形为下式的应力函数:

$$\chi=\chi^{(0)}+\chi^{(1)},\qquad \chi^{(1)}=f(r)+F(r)\cos 2\varphi.$$

重调和方程与 φ 无关的积分为

$$f(r)=ar^2\ln r+br^2+c\ln r.$$

而与 $\cos 2\varphi$ 成比例的积分,有

$$F(r)=dr^2+er^4+\frac{g}{r^2}.$$

这里引入的常数由下面的条件确定:当 $r=\infty$ 时,$\sigma_{ik}^{(1)}=0$;当 $r=R$ 时,$\sigma_{rr}=\sigma_{r\varphi}=0$. 最后得到

$$\chi^{(1)}=\frac{TR^2}{2}\left[-\ln r+\left(1-\frac{R^2}{2r^2}\right)\cos 2\varphi\right].$$

而应力分布由下式确定:

$$\sigma_{rr}=\frac{T}{2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\left[1+\left(1-\frac{3R^2}{r^2}\right)\cos 2\varphi\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{T}{2}\left[1+\frac{R^2}{r^2}-\left(1+\frac{3R^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi\right],$$

$$\sigma_{r\varphi}=-\frac{T}{2}\left[1+\frac{2R^2}{r^2}-\frac{3R^4}{r^4}\right]\sin 2\varphi.$$

特别是,在孔边:$\sigma_{\varphi\varphi}=T(1-2\cos 2\varphi)$,而在 $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\sigma_{\varphi\varphi}=3T$,即孔边应力是无限远处应力的 3 倍(比较§7 习题 12).

§14 板的大挠度弯曲

在§11 - 13 讲述的薄板弯曲理论只适用于挠度足够小的情形. 在这里我们预先指出,这个理论的应用条件是挠度 ζ 远小于板的厚度 h. 现在我们转向推导大挠度弯曲板的平衡方程. 此时,在与 h 相比较时,就不能假设挠度 ζ 是个小量. 但是我们着重指出,如前所述,形变本身必须是小的,其意思是应变张量的分量必须是小的. 实际上,这就是要求 $\zeta \ll l$,即挠度必须远小于板的

尺寸 l.

一般来说,板弯曲时通常伴随有拉伸同时发生[①]. 在小挠度情形,这个拉伸可以忽略. 而在大挠度弯曲时,绝不能作这样的忽略. 因为此时,板内根本不存在任何的"中性面". 弯曲时伴随有拉伸存在,是板不同于细杆的特性,细杆可以在经受很大的弯曲时,没有感受到总的拉伸. 板的这一特性是单纯的几何性质. 例如,将平面圆板弯曲成球面的一部分,如果发生的弯曲使圆周的长度保持不变,则必然要拉长它的直径; 如果板的直径没有拉长,则必然要压缩它的圆周.

在§11中,计算能量的公式(11.6)可以称为**纯弯曲能**,它只是板的总能量的一部分,这部分能量是在板没有任何总的拉伸时,由沿着板厚度的非均匀拉伸和压缩决定的. 除了这部分能量外,在总的能量里面还应包括另一部分,这部分洽好是由这个总拉伸的存在决定的,可以把它称为**拉伸能**.

纯弯曲和纯拉伸的形变已经分别在§11,§12和§13节中研究过了. 因此,现在我们可以直接利用那里已经得到的结果. 这时,没有必要沿着板的厚度来考虑它的构造,我们可以从一开始就把板当作没有厚度的二维曲面来研究.

首先推导的是: 当同时受到弯曲和在自身平面内拉伸作用时,确定拉伸板(作为曲面考虑)的应变张量表达式. 设 $\boldsymbol{u}$ 是纯拉伸时的二维位移矢量(分量为 u_x, u_y),和从前一样,ζ 表示弯曲时的横向位移. 于是,未形变时板的线元

$$dl^2 = dx^2 + dy^2,$$

形变后变为新线元 dl',它的平方

$$dl'^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + d\zeta^2.$$

这里,记 $du_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}dy$,对于 du_y 和 $d\zeta$ 采用类似的记法,我们得到具有更高精度项的 dl'^2:

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta.$$

式中的二维应变张量定义为

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \tag{14.1}$$

(在本节和下节我们都将用希腊字母表示指标,它总共只取 x 和 y 两个值;照例,两个重复指标表示求和). 在这里,忽略了 u_α 导数的平方项. 当然,关于 ζ 的导数不能作同样的忽略,因为它们一般没有一次项.

由公式(13.2)可确定与板拉伸有关的应力张量 $\sigma_{\alpha\beta}$. 式中的 $u_{\alpha\beta}$ 必须用由公式(14.1)给出的总应变张量代替. 纯弯曲能由公式(11.6)确定,可以写为

---

① 例如,平板弯曲成柱形曲面就是个例外.

$$\int \Psi_1(\zeta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

式中的 $\Psi_1(\zeta)$ 表示位于式(11.6)积分号下面的全部表达式. 根据一般公式,板在的单位体积的拉伸能为 $u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}/2$,由此式乘以 h 即得到单位表面上的能量,所以总的拉伸能就可以写为

$$\int \Psi_2(u_{\alpha\beta})\,\mathrm{d}f,$$

式中

$$\Psi_2 = h\frac{u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}}{2}. \tag{14.2}$$

这样一来,板在大挠度弯曲时的总自由能为

$$F_{\mathrm{pl}} = \int [\Psi_1(\zeta) + \Psi_2(u_{\alpha\beta})]\,\mathrm{d}f. \tag{14.3}$$

在推导平衡方程之前,我们先估计一下这两部分能量. ζ 的一阶导数是 ζ/l 的数量级,其中 l 为板的尺寸;而二阶导数是 ζ/l^2 的数量级. 因此,由式(11.6)可见,$\Psi_1 \sim Eh^3\zeta^2/l^4$①. 张量 $u_{\alpha\beta}$的数量级是 ζ^2/l^2,因此 $\Psi_2 \sim Eh\zeta^4/l^4$. 比较这两个表达式显见,在板的近似弯曲理论中,只有在 $\zeta^2 \ll h^2$ 的条件下,忽略 Ψ_2 项才是合理的.

能量最小值的条件记为:$\delta F + \delta U = 0$,其中,U 是外力场的势能. 我们将认为拉伸外力(如果存在的话)的作用,在与弯曲力的作用相比较时可以忽略(如果只是不太大的拉伸力,总可以作这样的忽略,因为薄板承受弯曲远比承受拉伸容易). 因此,对于 δU 也就有了 §12 中的表达式:

$$\delta U = -\int P\delta\zeta\,\mathrm{d}f,$$

式中 P 是板面每单位面积上的外力. 积分式$\int \Psi_1\,\mathrm{d}f$ 的变分,已经在 §12 中计算过了,为

$$\delta\int \Psi_1\,\mathrm{d}f = D\int \nabla^4\zeta\delta\zeta\,\mathrm{d}f.$$

我们没有写出位于公式(12.3)中的闭合周线积分,因为它所确定的不是平衡方程本身,只是它的边界条件,而在这里边界条件还不是我们所关心的问题.

最后,来计算积分$\int \Psi_2\,\mathrm{d}f$ 的变分. 式中的变分即有对位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 之分量的,也有对 ζ 的. 我们有

$$\delta\int \Psi_2\,\mathrm{d}f = \int \frac{\partial \Psi_2}{\partial u_{\alpha\beta}}\delta u_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}f.$$

① 在进行数量级比较时,常引用记号"~",表示在它两边的量具有相同的数量级,以下同. ——译者注

单位体积自由能对 $u_{\alpha\beta}$ 的导数等于 $\sigma_{\alpha\beta}$，因此 $\partial\Psi_2/\partial u_{\alpha\beta}=h\sigma_{\alpha\beta}$. 同时，用表达式(14.1)代换 $u_{\alpha\beta}$，即得到

$$\delta\int\Psi_2\mathrm{d}f=h\int\sigma_{\alpha\beta}\delta u_{\alpha\beta}\mathrm{d}f=\frac{h}{2}\int\sigma_{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial\delta u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\delta u_\beta}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\beta}\right\}\mathrm{d}f,$$

或由于 $\sigma_{\alpha\beta}$ 的对称性

$$\delta\int\Psi_2\mathrm{d}f=h\int\sigma_{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial\delta u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x_\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right\}\mathrm{d}f.$$

现在利用分部积分我们得到

$$\delta\int\Psi_2\mathrm{d}f=-h\int\left[\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\delta u_\alpha+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right)\delta\zeta\right]\mathrm{d}f.$$

这里我们又没有写出环绕板面的闭路周线积分.

把所有得到的表达式归结在一起，我们有

$$\delta F_{\mathrm{pl}}+\delta U=\int\left\{\left[D\,\nabla^4\zeta-h\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right)-P\right]\partial\zeta-h\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\delta u_\alpha\right\}\mathrm{d}f=0.$$

为了使上述关系式满足恒等关系，$\delta\zeta$ 的系数和 δu_α 的系数必须分别等于零. 于是，就得到如下的方程组：

$$D\,\nabla^4\zeta-h\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right)=P,\tag{14.4}$$

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0.\tag{14.5}$$

这组方程包含三个未知函数：位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 的两个分量 u_x,u_y 和横向位移 ζ. 方程组的解，同时给出弯曲板的形状（即函数 $\zeta(x,y)$）和由弯曲结果引起的伸长. 方程(14.4)和(14.5)借助于引入的函数 χ 可以得到某些简化，函数 χ 与 $\sigma_{\alpha\beta}$ 是通过关系式(13.7)联系的. 将式(13.7)代入方程(14.4)后，式(14.4)变为如下形式：

$$D\,\nabla^4\zeta-h\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)=P.\tag{14.6}$$

至于方程(14.5)，由表达式(13.7)自然满足. 因此必须再推导出一个方程，它可以由关系式(13.7)和(13.2)消去 u_α 得到.

为此，可按以下方法去作. 首先，通过 $\sigma_{\alpha\beta}$ 表示 $u_{\alpha\beta}$，由式(13.2)我们得到

$$u_{xx}=\frac{1}{E}(\sigma_{xx}-\sigma\sigma_{yy}),\quad u_{yy}=\frac{1}{E}(\sigma_{yy}-\sigma\sigma_{xx}),\quad u_{xy}=\frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xy}.$$

由此，将 $u_{\alpha\beta}$ 用表达式(14.1)代入，而 $\sigma_{\alpha\beta}$ 用表达式(13.7)代入，即得到下面的等式：

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}-\sigma\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}-\sigma\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}=-\frac{2(1+\sigma)}{E}\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}.$$

对第一个等式作用算子 $\partial^2/\partial y^2$，对第二个等式作用 $\partial^2/\partial x^2$，对第三个等式作用 $\partial^2/\partial x\partial y$. 然后，将第一个等式与第二个等式相加，并减去第三个等式. 这样，含有 u_x 和 u_y 的项，彼此相约，我们就得到如下的方程：

$$\nabla^4\chi+E\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}=0.\tag{14.7}$$

方程(14.6)和(14.7)是关于大挠度弯曲薄板的完全方程组(A. Föppl, 1907). 这组方程极其复杂，甚至在最简单的情形下也不能有精确解. 要注意，它们是非线性的.

我们简略的提一下薄板形变的一种特殊情形，即所谓的膜. 在薄板边缘上外加拉力时，它能承受很大的张力，这样的薄板称为膜. 在这种情形下，可以忽略由于板弯曲产生的附加纵向应力，因此可以认为应力张量 $\sigma_{\alpha\beta}$ 的分量就等于不变的外加拉应力. 现在，在方程(14.4)中，将第一项与第二项比较，前者可以忽略. 于是，我们得到平衡方程

$$h\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+P=0.\tag{14.8}$$

边界条件：在薄膜的边缘周线上 $\zeta=0$. 上面的方程是线性方程. 特别简单的情形是各向均匀拉伸. 这时，各个方向上的膜应力都是相同的. 设 T 是施加于板边缘单位长度上的拉力的绝对值. 于是，$h\sigma_{\alpha\beta}=T\delta_{\alpha\beta}$，我们得到如下形式的平衡方程：

$$T\nabla^2\zeta+P=0.\tag{14.9}$$

习　　题

习题1　试确定，当弯曲程度大到 $\zeta\gg h$ 时，板的挠度与作用在它上面的力的关系.

解：估计方程(14.7)的各项表明，$\chi\sim E\zeta^2$. 当 $\zeta\gg h$ 时，将式(14.6)中的第一项与第二项相比较，前者是个小量，后者的数量级为 $h\zeta\chi/l^4\sim Eh\zeta^3/l^4$（$l$ 为板的尺寸）. 与外力 P 比较，得到

$$\zeta\sim\left(\frac{l^4P}{Eh}\right)^{1/3}.$$

特别是，由此显见，ζ 与力的立方根成正比.

习题2　试确定圆形膜(半径 R)在重力场中水平放置时的形变.

解：已知 $P=\rho gh$，在极坐标中，式(14.9)具有如下形式：

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)=-\frac{\rho gh}{T}.$$

由 $r=0$ 时解的有限性和满足 $r=R$ 时 $\zeta=0$ 的条件得到

$$\zeta=\frac{\rho gh}{4T}(R^2-r^2).$$

§15　壳的形变

至今有关薄板形变的讨论，总是指未发生形变状态的板是平面. 其实，本来就具有弯曲形状的板(这样的板称为**壳**)，它的形变所显现出的特殊性，与平板的形变有原则上的区别.

伴随平板弯曲引起的伸长，与板自身的挠度值相比，是二阶小量的效果. 例如，表现在应变张量(14.1)中，这一伸长取决于 ζ 的二次方. 壳的形变完全是另外一种情况：在这里，伸长是一阶小量的效果，因此，甚至在**小挠度弯曲**时也起着主要的作用. 从一个极简单的例子，最容易看清楚这个性质，那就是球壳的均匀拉伸. 如果使球壳上所有的点都承受同样的径向位移 ζ，则赤道长度的增加等于 $2\pi\zeta$，相对伸长为 $2\pi\zeta/(2\pi R)=\zeta/R$. 因此，应变张量与 ζ 的一次幂成正比. 当 $R\to\infty$，即曲率趋于零时，这个影响也趋于零，因而是与壳的曲率有关的特殊性质.

设 R 是壳曲率半径的数量级，它通常与壳尺寸的数量级相同. 于是，伴随弯曲引起拉伸的应变张量就是 ζ/R 的数量级，相应的应力张量是 $E\zeta/R$ 的数量级，而形变能(相对于单位面积的)，根据式(14.2)，是 $Eh(\zeta/R)^2$ 的数量级. 和从前一样，纯弯曲能是 $Eh^3\zeta^2/R^4$ 的数量级. 我们看到，第一式与第二式的比为 $\sim(R/h)^2$，亦即二者的数量级相差很大. 我们强调指出，不管挠度 ζ 与厚度 h 之间存在怎样的关系，上面的结果都是成立的，而在平板弯曲时，只有在 $\zeta\sim h$ 时，拉伸才开始起作用.

在某些情形下，可能存在壳弯曲的特殊类型，即在弯曲时不发生任何的拉伸. 例如，柱壳(两端开口)，如果在弯曲时使柱壳的所有母线彼此保持平行(即沿着任何的母线挤压柱壳时)，则可能存在没有拉伸的形变. 这种没有拉伸的形变在几何上是可能的，如果壳具有自由边界(亦即不闭合)，或者如果壳是闭合的，但它的曲率在不同的地方有不同的符号. 例如，闭合球壳不可能存在没有拉伸的弯曲，但是如果在球壳上开个孔(并且孔的边缘不要固定)，则这样的形变就成为可能的了. 因为纯弯曲能远比拉伸能小，很明显，如果给定的壳容许没有拉伸的形变，则一般来说，壳在任意外力作用下，就会实际出现这样的形变. 要求弯曲时没有拉伸，就给可能的位移 u_α 附

加了很大的限制. 这些条件是纯几何的,并能够用微分方程的形式表示出来,它应该包含在关于这种形变的总平衡方程组里面. 这个问题到此为止,我们不再讨论.

如果壳的形变伴随有拉伸,则一般来说,拉伸应力比弯曲应力大得多,并且弯曲应力可以忽略(建立在忽略弯曲应力基础上的壳体理论,称为壳体的**薄膜理论**).

壳的拉伸能,可以由遍及壳面的积分计算:

$$F_{\text{pl}} = \frac{h}{2}\int u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}f, \tag{15.1}$$

式中 $u_{\alpha\beta}$是相对于曲线坐标的二维($\alpha,\beta=1,2$)应变张量. 而应力张量 $\sigma_{\alpha\beta}$与 $u_{\alpha\beta}$的关系式(13.2),现在可以用二维张量记号写为

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\sigma^2}[(1-\sigma)u_{\alpha\beta} + \sigma\delta_{\alpha\beta}u_{\gamma\gamma}]. \tag{15.2}$$

特别需要研究的情形是壳承受横向集中力的作用. 作为这样的集中力可以是从支座的固定点(或线)作用在壳上的反作用力. 集中力使壳在施力点周围不大的区域内产生弯曲. 设 d 是力 f 作用点区域的数量级(所以它的面积 $\sim d^2$). 因为在距离 d 的长度范围内,挠度 ζ 的改变相当大,故弯曲能(单位面积上)的数量级是 $Eh^3\zeta^2/d^4$,而总弯曲能(在数量级为 d^2 的面积上) $\sim Eh^3\zeta^2/d^2$. 和从前一样,拉伸应变张量 $\sim\zeta/R$,而由集中力引起的总拉伸能 $\sim Eh(\zeta/R)^2d^2$. 因为随着 d 的减小,弯曲能增加,而拉伸能下降,所以很明显,在确定施加集中力附近的形变时,必须考虑这两部分能量. 弯曲区域大小 d 的数量级由这两部分能量之和取最小值的条件确定,于是

$$d \sim \sqrt{hR}, \tag{15.3}$$

此时,能量的数量级是 $Eh^2\zeta^2/R$. 使按照 ζ 变化的能量和力 f 的功相等,即求出挠度 $\zeta \sim fR/Eh^2$.

但是,如果作用在壳上的力足够大,则壳就会产生挠曲,使其形状发生相当大的改变. 在这种特殊情形下,确定形变与附加荷载的关系需要专门研究①.

设凸壳(具有确保几何刚度的固定边界)受到一个沿表面内法线方向的较大集中力 $\boldsymbol{f}$ 的作用. 为简单起见,我们假设壳是半径为 R 的球壳的一部分,挠曲部分是个球冠,它近似于初始形状的镜像(图 9 表示壳的子午线断面). 现在的问题是确定挠曲尺寸与力大小之间的关系.

---

① 本文下面叙述的结果属于波格列洛夫(А. В. Погорелов(1960)). 该问题更精确的分析,以及其它类似的问题可以参见他的著作: Теория оболочек при закритических деформациях(超临界形变的壳体理论). Москва: Наука,1965.

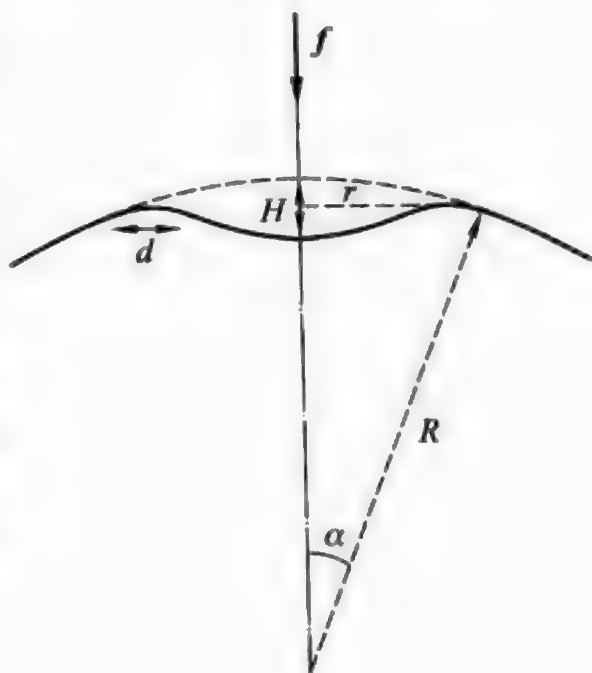


图 9

弹性能的主要部分是集中于挠曲区域边缘使壳体受到较大弯曲的狭条地带(把它称为弯曲狭条,用 d 表示它的宽度)的能量. 我们估计一下这个能量,假设挠曲部分的尺寸(半径) $r \ll R$,这时角 $\alpha \ll 1$(见图 9). 此时,$r = R\sin\alpha \sim R\alpha$,而挠曲深度$H = 2R(1-\cos\alpha) \sim R\alpha^2$. 用 ζ 表示在弯曲狭条内壳上各点的位移. 和前面已经做过的完全一样,我们得到每单位表面面积上沿着子午线的弯曲能和沿着纬线的拉伸能①,相应的数量级分别等于

$$\frac{Eh^3\zeta^2}{d^4} \quad 和 \quad \frac{Eh\zeta^2}{R^2},$$

在给定的几何情况下确定位移 ζ 的数量级:在宽度 d 上面的子午线方向改变了一个角 $\sim\alpha$,由此,$\zeta \sim \alpha d \sim rd/R$. 乘以弯曲狭条的面积($\sim rd$),我们得到能量

$$\frac{Eh^3r^3}{R^2d} \quad 和 \quad \frac{Ehd^3r^3}{R^4},$$

由它们之和的最小值条件,我们重新求出弯曲狭条宽度 $d \sim (hR)^{1/2}$,而这时总弹性能 $\sim Er^3(h/R)^{5/2}$,或换成另一种形式②:

$$\text{const} \cdot Eh^{5/2}\frac{H^{3/2}}{R}, \tag{15.4}$$

在进行推导时我们已经假定 $d \ll r$,因此,公式(15.4)在满足下面的条件时是正确的:

$$\frac{Rh}{r^2} \ll 1. \tag{15.5}$$

在形成挠曲时,球冠的外层变为内层并相应的受到压缩,而内层变为外层受到拉伸. 相对伸长(或缩短) $\sim h/R$. 所以,跟它们相关联的翘曲区域的总能量 $\sim E(h/R)^2hr^2$. 在式(15.5)的条件下,与弯曲狭条的能量式(15.4)相比较,挠曲区域的总能量确实是小的.

待求的挠曲深度 H 与施加力 f 之间的关系,可以由使 f 与能量式(15.4)对 H 的导数相等得到. 于是,求出

---

① 弯曲时,壳体沿子午线的曲率,在第一次近似时没有影响,所以,就像平板的柱形弯曲一样,沿子午线没有发生总的拉伸.

② 更精确地计算给出式子前面的常系数值:$\text{const} = 1.2(1-\sigma^2)^{-3/4}$.

$$H \sim \frac{f^2 R^2}{E^2 h^5}, \tag{15.6}$$

我们要注意到这一关系的非线性性质.

最后,假设壳的形变(挠曲)是在均匀外部压力 p 作用下发生的. 在这种情形下,外力功等于 $p\Delta V$,其中 $\Delta V \sim Hr^2 \sim H^2 R$ 是在挠曲时受限制壳的体积变化. 令总自由能(亦即弹性能(15.4)减去上述的功)对 H 的导数等于零,得到

$$H \sim \frac{h^5 E^2}{R^4 p^2}. \tag{15.7}$$

相反的相关性质(在 p 减小时,H 增加)表明,在这种情形下,挠曲状态是不稳定的. 由公式(15.7)确定的 H 值适合于在给定 p 时的不稳定平衡:具有较大 H 值的挠曲自发的增长,而具有较小 H 值的挠曲自发的减小(很容易验证,即在式(15.7)相应于最大值时,而总自由能不是最小值). 存在这样一个外荷载的临界值 $p = p_c$,超过这个临界值后,甚至壳形状的一点小变化也会自发的增加. 可以估计一下这个临界值,把它作为公式(15.7)中的 p 值,给出 $H \sim h$,即可得到:

$$p_c \sim \frac{Eh^2}{R^2}. \tag{15.8}$$

我们在上面只是简单而综合地讲述了壳的理论,在本节后面的习题中附有若干简单的例题.

习　　题

习题 1 试导出球壳(半径 R)对称形变的平衡方程,对称轴通过球壳中心.

解:利用球坐标系(坐标原点位于球壳中心,而极轴沿着形变壳的对称轴)的角 θ,φ 作为壳面上的二维坐标.

设 P_r 为相对于壳面单位面积上的径向外力,该力必须与作用在壳元上的切向应力之径向合力相抵消. 相应的条件记为:

$$\frac{h}{R}(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}) = P_r. \tag{1}$$

该方程精确的类似于熟知的确定两种介质压力差(与作用在分界面上的表面张力有关)的拉普拉斯方程.

其次,设 $Q_z(\theta)$ 是在 $\theta = \text{const}$ 的纬线圆周往上的壳面上作用的全部外力沿极轴(z 轴)方向的合力. 该力必须与作用在壳面同一纬线圆截面 $2\pi Rh\,\sin\theta$ 上的应力在 z 轴方向的投影 $2\pi Rh\sigma_{\theta\theta}\sin\theta$ 相抵消. 由此

$$2\pi Rh\sigma_{\theta\theta}\sin^2\theta = Q_z(\theta). \tag{2}$$

由方程(1)和(2)可确定应力分布,然后按如下公式求应变张量:

$$u_{\theta\theta}=\frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta}-\sigma\sigma_{\varphi\varphi}),\quad u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{E}(\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma\sigma_{\theta\theta}),\quad u_{\theta\varphi}=0. \tag{3}$$

最后，位移矢量可借助于下面的方程求出：

$$u_{\theta\theta}=\frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}\theta}+u_r\right),\quad u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{R}(u_\theta\cot\theta+u_r). \tag{4}$$

习题 2　试确定圆顶向上放置的半球壳在自重影响下的形变，圆顶的边缘可以自由的沿着水平支座移动（图 10）.

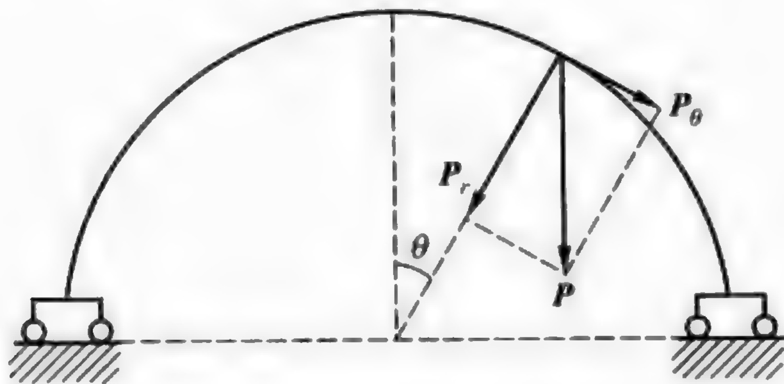


图 10

解：我们有

$$P_r=-\rho gh\cos\theta,\quad Q_z=-2\pi R^2(1-\cos\theta)\rho gh$$

（Q_z 为 $\theta=\mathrm{const}$ 的圆周往上那部分壳的总重）. 由式（1）和（2）求出

$$\sigma_{\theta\theta}=-\frac{R\rho g}{1+\cos\theta},\quad \sigma_{rr}=-R\rho g\left(\frac{1}{1+\cos\theta}-\cos\theta\right).$$

按式（3）计算 $u_{\varphi\varphi}$ 和 $u_{\theta\theta}$，然后由方程（4）计算 u_θ 和 u_r（积分第一个方程时出现的常数，要用 $\theta=\pi/2$ 时 $u_\theta=0$ 来确定），结果得到：

$$u_\theta=\frac{R^2\rho g(1+\sigma)}{E}\left[\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}+\ln(1+\cos\theta)\right]\sin\theta,$$

$$u_r=\frac{R^2\rho g(1+\sigma)}{E}\left[1-\frac{2+\sigma}{1+\sigma}\cos\theta-\cos\theta\ \ln(1+\cos\theta)\right].$$

在 $\theta=\pi/2$ 时，u_r 给出支座水平位移值.

习题 3　试确定具有边缘固定，圆顶朝下放置的半球壳的形变；设壳内装满液体（图 11），而与液体重量相比，壳体本身的重量可以忽略.

解：我们有

$$P_r=\rho_0 gR\cos\theta,\quad P_\theta=0,$$

$$Q_z=2\pi R^2\int_0^\theta P_r\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi R^3\rho_0 g}{3}(1-\cos^3\theta)$$

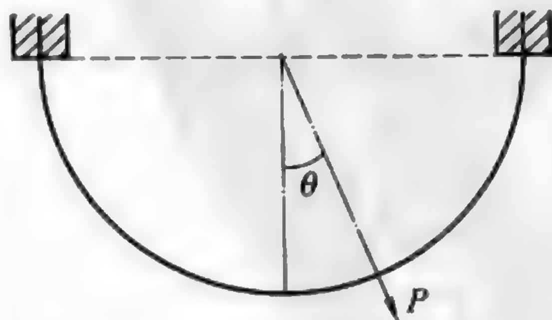


图 11

(ρ_0 是液体的密度). 其次,用公式(1)和(2)求出

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{R^2\rho_0 g}{3h}\frac{(1-\cos^3\theta)}{\sin^2\theta},\quad \sigma_{\varphi\varphi}=\frac{R^2\rho_0 g}{3h}\frac{(-1+3\cos\theta-2\cos^3\theta)}{\sin^2\theta}.$$

对于位移,可以求得下式:

$$u_\theta=-\frac{R^3\rho_0 g(1+\sigma)}{3Eh}\sin\theta\left[\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}+\ln(1+\cos\theta)\right],$$

$$u_r=\frac{R^3\rho_0 g(1+\sigma)}{3Eh}\left[\cos\theta\ln(1+\cos\theta)-1+\frac{3\cos\theta}{1+\sigma}\right].$$

在 $\theta=\pi/2$ 时,u_r 仍然是有限值而没有化为零,而它必须为零. 这就意味着,在壳体的固定边缘附近,实际上发生了相当大的弯曲,所得解答已经变为不再适用了.

习题 4 有一形如球冠的壳,它的自由边缘支放在固定的支台上(图 12),试确定在自重 Q 作用下壳的挠度值.

解: 主要形变发生在翻卷的边缘附近(图 12 上的虚线). 此时,位移 u_θ 远小于径向位移 $u_r=\zeta$. 因为,ζ 随着离开支撑线而迅速的减小,于是产生的形变就可以当作长度为 $2\pi R\sin\alpha$ 的平板形变来研究. 它是由板的弯曲形变和拉伸形变组成的. 板上每一点的相对伸长等于 ζ/R(R 是壳的半径),因而,拉伸能(单位体积的)为 $E\zeta^2/2R^2$,引入一个距支撑线的距离 x 作为独立变量,则总拉伸能为

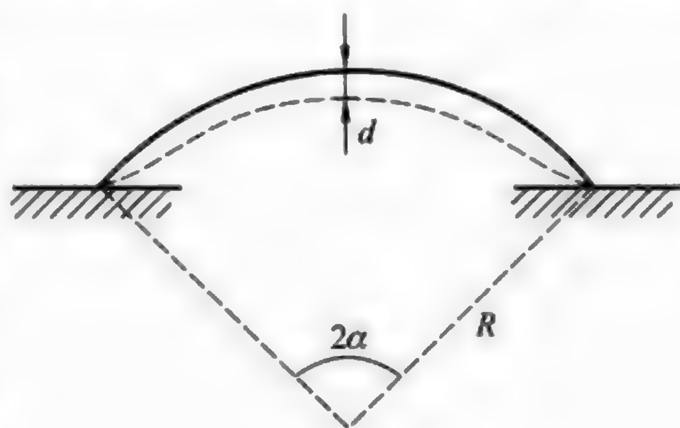


图 12

$$F_{1\mathrm{pl}}=2\pi R\sin\alpha\frac{hE}{2R^2}\int\zeta^2\mathrm{d}x,$$

而弯曲能为

$$F_{2\mathrm{pl}}=2\pi R\sin\alpha\frac{h^3E}{24(1-\sigma^2)}\int\left(\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x.$$

将和 $F_{\mathrm{pl}}=F_{1\mathrm{pl}}+F_{2\mathrm{pl}}$ 对 ζ 取变分,得到如下方程:

$$\frac{\mathrm{d}^4\zeta}{\mathrm{d}x^4}+\frac{12(1-\sigma^2)}{h^2R^2}\zeta=0.$$

当 $x\to\infty$ 时，ζ 必须趋近于零；而当 $x=0$ 时，必须实现力矩等于零的边界条件：$\zeta''=0$. 弯曲时，壳面的法向力与相应的重力分量相等的条件：

$$2\pi R\sin\alpha\frac{h^3E}{12(1-\sigma^2)}\zeta'''=Q\cos\alpha.$$

满足上述这些条件的解为

$$\zeta=A\mathrm{e}^{-\kappa x}\cos\kappa x,$$

式中

$$\kappa=\left[\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2R^2}\right]^{1/4},\qquad A=\frac{Q\cot\alpha}{Eh}\left[\frac{3R^2(1-\sigma^2)}{8\pi h^3}\right]^{1/4}$$

壳的挠度值为

$$d=\zeta(0)\cos\alpha=A\cos\alpha.$$

§16　杆的扭转

现在我们来研究细杆的形变. 这种情形与前面所研究过的各种问题的不同之处是：即使形变很小（即应变张量 u_{ik} 很小），位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 也可能很大①. 譬如，细长杆在小弯曲时，甚至杆内相邻点的相对位移很小，而杆两端在空间可能有了相当大的移动.

杆的某些部分能够伴随发生较大位移的形变有两种类型：第一类是杆的**弯曲**，第二类是杆的**扭转**. 我们首先研究第二种情形.

扭转形变是这样的形变：即在形变时杆仍然是直的，但是杆的每一层横截面与位于它底下的横截面之间相对的转动了某个角度. 如果杆很长，则在小扭转时，相隔足够远的两个截面彼此之间也能够转动较大的角度. 杆侧表面上的母线，形变前与杆轴平行，在扭转时变成了螺旋的形状.

我们来研究任意截面的细直杆. 选取坐标系，使 z 轴沿着杆轴，坐标原点可以取在杆内的任何一点. 引入**扭转角** τ 作为杆在单位长度上的旋转角. 这就是说，处于距离为 $\mathrm{d}z$ 的两个无限接近的横截面，彼此的相对旋转角为 $\mathrm{d}\varphi=\tau\mathrm{d}z$（于是 $\tau=\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}z$）. 我们假设扭转形变本身很小，亦即杆上相邻部分的相对位移很小. 这个条件就是当沿着杆长度的距离为杆的横截面尺寸 R 的数量级时，两截面的相对旋转角很小，亦即

$$\tau R\ll 1 \tag{16.1}$$

现在我们来考察在坐标原点附近不长的一段杆，并确定其中各点的位移 $\boldsymbol{u}$. 选取在坐标平面 xy 上的横截面作为没有位移的面. 众所周知，在径矢 $\boldsymbol{r}$ 旋转一

---

① 只有不改变杆形状的简单拉伸是个例外，即在小的拉伸时，除了张量 u_{ik} 总是小量外，矢量 $\boldsymbol{u}$ 同样也是小量.

个小角 $\delta\varphi$ 时,其端点的位移由如下公式确定:

$$\delta \boldsymbol{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r} \tag{16.2}$$

式中 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 是一矢量,其绝对值等于旋转角,方向与旋转轴相同. 现在的情形是绕 z 轴旋转,并且对于坐标为 z 的点相对于坐标平面 xy 的旋转角等于 τz(坐标原点附近的区域,角 τ 可以视为常量). 现在,由公式(16.2)给出位移矢量的分量:

$$u_x = -\tau z y, \quad u_y = \tau z x. \tag{16.3}$$

一般来说,在扭转时,杆上的点也产生沿着 z 轴的位移. 因为 $\tau=0$ 时不存在这个位移,所以在小的 τ 时,可以认为沿 z 轴的位移与 τ 成正比. 于是

$$u_z = \tau \psi(x, y), \tag{16.4}$$

式中 $\psi(x,y)$ 是 x 和 y 的函数,称为**扭转函数**. 因而由公式(16.3)和(16.4)描述的形变是这样的形变,即杆的每一个横截面绕 z 轴旋转,同时还发生了翘曲形变,而不再是原来的平面. 必须指出,按一定方式在 xy 平面选择了坐标原点,就相当于我们把杆截面上的一个确定点"固定"住了,所以它就不能在这个平面内移动(但是,可以沿着 z 轴移动). 自然,改变坐标原点的选择,不会影响扭转形变本身,而只是引起了一个一般并不重要的整体位移.

知道了 $\boldsymbol{u}$ 之后就可以求出应变张量的分量. 因为在所研究的区域内 $\boldsymbol{u}$ 很小,所以可以利用公式

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

最后得到:

$$u_{xx} = u_{yy} = u_{xy} = u_{zz} = 0,$$

$$u_{xz} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right), \quad u_{yz} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right). \tag{16.5}$$

注意,$u_{ll}=0$,换句话说,扭转并不伴随体积的改变,亦即扭转是纯剪形变.

关于应力张量的分量,我们得到:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0,$$

$$\sigma_{xz} = 2\mu u_{xz} = \mu\tau\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right), \quad \sigma_{yz} = 2\mu u_{yz} = \mu\tau\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) \tag{16.6}$$

(在这里,利用剪切模量 μ 来代替 E 和 σ 比较方便). 因为只有 σ_{xz} 和 σ_{yz} 不为零,所以,一般平衡方程 $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k=0$ 现在归结为方程

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0. \tag{16.7}$$

将式(16.6)代入上式,我们得到扭转函数应该满足的方程:

$$\nabla^2 \psi = 0, \tag{16.8}$$

式中∇^2是二维拉普拉斯算子.

但是,更为方便的是引用另一个辅助函数$\chi(x,y)$①,它定义为等式

$$\sigma_{xz}=2\mu\tau\frac{\partial\chi}{\partial y},\quad \sigma_{yz}=-2\mu\tau\frac{\partial\chi}{\partial x},\tag{16.9}$$

对于这个函数,在杆截面的周线上可获得更为方便的边界条件(见后面). 比较式(16.9)和(16.6),得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=y+2\frac{\partial\chi}{\partial y},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-x-2\frac{\partial\chi}{\partial x}.\tag{16.10}$$

将第一个等式对y取导数,第二个等式对x取导数,并从其中的一个减去另一个,即得到关于函数χ的方程:

$$\nabla^2\chi=-1.\tag{16.11}$$

为了确定在杆的表面上的边界条件,我们注意到,由于杆细长,在侧表面上作用的外力远小于发生在杆内部的应力,因而(在寻求边界条件时)可以令其等于零. 这一问题详细的精确分析类似于我们在研究薄板弯曲时已经做过的那样. 这样一来,在杆的侧表面上应有$\sigma_{ik}n_k=0$. 由于z轴方向与杆轴一致,所以法矢量$\boldsymbol{n}$只有分量n_x,n_y. 因而,所写的等式归结为如下条件:

$$\sigma_{zx}n_x+\sigma_{zy}n_y=0,$$

将式(16.9)代入上式,得到

$$\frac{\partial\chi}{\partial y}n_x-\frac{\partial\chi}{\partial x}n_y=0.$$

但是,杆截平面边界线之法矢量的分量为

$$n_x=-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l},\quad n_y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l},$$

式中x,y是边界点的坐标; $\mathrm{d}l$为弧元. 于是我们得到

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\chi}{\partial y}\mathrm{d}y=\mathrm{d}\chi=0,$$

由此$\chi=\mathrm{const}$,亦即在截面的边界上χ是常数. 因为在式(16.9)的定义中,只引入了函数χ的导数,很明显,对于这个函数可以增加任意的常数. 因而,如果截面的边界是单连通的,作为方程(16.11)的边界条件②,不失一般性,可以令

$$\chi=0.\tag{16.12}$$

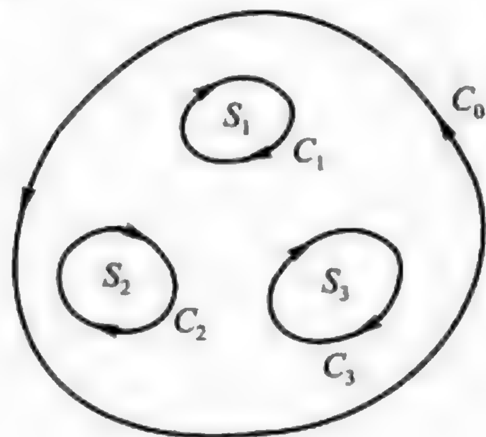
---

① 该辅助函数亦称为扭转应力函数. ——译者注

② 关于用方程(16.11)和边界条件(16.12)确定扭转形变的问题,与关于用方程(14.9)确定平面薄膜承受均匀荷载下的弯曲形状的问题,两者在形式上是相同的.

我们注意到,同样有效的还有流体力学比拟:即用形如(16.11)的方程确定黏性流体沿着管截面的速度$v(x,y)$分布问题,边界条件(16.12)相当于在固定管壁上$v=0$(参见第六卷,§17).

在多连通的情形下，在每一个形成边界的闭合曲线上，χ 具有不同的常数值. 因此，只能在其中的一个边界曲线上，例如在外边的边界（图 13 上的 C_0）上，令 χ 等于零. 在其他的边界上，χ 的值由**位移单值条件**确定（位移 $u_z = \tau\psi(x,y)$ 是坐标的函数）. 注意到扭转函数 $\psi(x,y)$ 的单值性，则它的微分 $d\psi$ 在闭路周线上的积分必须等于零. 因此，借助于关系式 (16.10)，我们有



$$\oint d\psi = \oint\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right) =$$

$$= -2\oint\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}dy - \frac{\partial\chi}{\partial y}dx\right) - \oint(xdy - ydx) = 0,$$

图 13

或

$$\oint\frac{\partial\chi}{\partial n}dl = -S, \qquad (16.13)$$

式中 $\partial\chi/\partial n$ 是函数 χ 沿边界外法线方向的导数，而 S 为该边界线所包围的面积. 将式 (16.13) 应用于每一个闭合曲线 $C_1, C_2, \cdots$，我们即得到待求的条件.

现在来确定受扭转杆的自由能. 对于单位体积的自由能，我们有

$$F = \frac{\sigma_{ik}u_{ik}}{2} = \sigma_{xz}u_{xz} + \sigma_{yz}u_{yz} = \frac{1}{2\mu}(\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2).$$

将式 (16.9) 代入上式，得

$$F = 2\mu\tau^2\left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2\right] \equiv 2\mu\tau^2(\nabla\chi)^2,$$

式中符号 ∇ 表示二维梯度. 相对于单位长度杆的**扭转能**，可由上式遍及横截面面积的积分求出，结果等于 $C\tau^2/2$，其中系数 C 为

$$C = 4\mu\int(\nabla\chi)^2 df,$$

我们将 C 称为杆的**抗扭刚度**. 杆的总弹性能等于沿其长度的积分：

$$F_{rod} = \frac{1}{2}\int C\tau^2 dz. \qquad (16.14)$$

将式 C 中的 $(\nabla x)^2$ 写为

$$(\nabla\chi)^2 = \nabla\cdot(\chi\nabla\chi) - \chi\nabla^2\chi = \nabla\cdot(\chi\nabla\chi) + \chi,$$

并将第一项积分变换为沿杆截面的闭路周线积分，则得到

$$C = 4\mu\oint\chi\frac{\partial\chi}{\partial n}\mathrm{d}l + 4\mu\int\chi\mathrm{d}f. \tag{16.15}$$

如果截面的边界是单连通的,则由于边界条件 $\chi=0$,使第一项消失,上式变为

$$C = 4\mu\int\chi\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{16.16}$$

对于多连通的边界(见图 13),在外周线 C_0 上置 $\chi=0$,并通过 χ_k 表示内部周线 C_k 上的 χ 值,借助于式(16.13)我们得到

$$C = 4\mu\sum_k\chi_kS_k + 4\mu\int\chi\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{16.17}$$

(必须指出,式(16.15)中的第一项积分,在周线 C_0 上按正向取积分,而在周线 C_k 上按反向取积分).

现在我们研究扭转中最普通的情形,就是杆的一端固定不动而外力仅附加于另一端表面的情形,这些外力只使杆件产生扭转,而没有任何其它的形变(例如弯曲形变). 换句话说,它们组成了某个环绕固定杆杆轴的力偶,该力偶矩用 M 表示.

很自然的预想到,在这种情形下,沿杆长的单位长度扭转角 τ 是个常量. 例如,从平衡时杆的总自由能为最小值的条件即可以确信这一点. 形变杆的总能量等于 $F_{\text{rod}}+U$ 之和,其中,U 为由外力作用引起的势能. 将 $\tau=\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}z$ 代入式(16.14)并对 φ 取变分,求得

$$\delta\frac{1}{2}\int C\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z + \delta U = \int C\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\delta\varphi}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z + \delta U = 0,$$

或进行分部积分,得

$$-\int C\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z}\delta\varphi\mathrm{d}z + \delta U + C\tau\delta\varphi = 0.$$

上式左边的最后一项,是积分上下限(即杆件两端面处)的差值. 杆的一端,比如说下端固定,因而在那里 $\delta\varphi=0$. 至于说到势能的变分 δU,它是外力在旋转角 $\delta\varphi$ 上做的功,但取相反符号. 由一般力学已知,旋转时力偶的功,等于旋转角与力偶矩之积 $M\delta\varphi$. 因为没有任何其他的外力,所以 $\delta U=-M\delta\varphi$,于是我们得到

$$\int C\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z}\delta\varphi \mathrm{d}z+\delta\varphi(-M+C\tau)=0. \qquad (16.18)$$

在左边第二项取杆的上限值. 在对 dz 的积分中,变分 $\delta\varphi$ 是任意的,因而必须使 $C\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}z=0$,亦即

$$\tau=\text{const}. \qquad (16.19)$$

于是,沿着杆的整个长度,单位扭转角是个常值. 因此,上端面相对于下端面的总旋转角等于单位扭转角 τ 与杆长 l 之积 τl.

方程(16.18)中的第二项,同样也必须等于零. 由此得到常扭转角的如下表达式:

$$\tau=\frac{M}{C}. \qquad (16.20)$$

习 题

习题 1 试确定圆截面(半径 R)杆的抗扭刚度.

解: 习题 1-4 的解,在形式上与黏性流体在同样截面管里运动问题的解是一样的(参见 74 页脚注). 流体通过管截面的流量 Q 对应这里的 C.

对于圆截面杆(坐标原点在截面中心)我们有

$$\chi=\frac{1}{4}(R^2-x^2-y^2).$$

抗扭刚度:

$$C=\frac{\pi\mu R^4}{2}.$$

对于函数 ψ,由式(16.10)得 $\psi=\text{const}$. 但是,按照式(16.4),常量 ψ 相当于杆件整体沿 z 轴的简单位移,因此可以认为 $\psi=0$. 因而,圆杆的横截面在扭转时仍然保持为平面.

习题 2 同习题 1,但截面改为椭圆(半轴为 a 和 b).

解: 抗扭刚度

$$C=\pi\mu\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}.$$

纵向位移分布由扭转函数给出如下:

$$\psi=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}xy$$

(坐标轴沿椭圆轴方向).

习题 3 同习题 1,但截面改为等边三角形(边长为 a)的形式.

解: 抗扭刚度:

$$C=\frac{\sqrt{3}}{80}\mu a^4.$$

扭转函数

$$\psi=\frac{1}{6a}y(x\sqrt{3}+y)(x\sqrt{3}-y).$$

同时，坐标原点选在三角形的中心，而 x 轴与三角形中的一个高重合.

习题 4　同习题 1，但杆件为一长条薄板（宽为 d，厚为 h，却 $h\ll d$）.

解：这一问题相当于黏性流体在两个平行壁板之间的流动问题. 结果：

$$C=\frac{\mu dh^3}{3}.$$

习题 5　同习题 1，但杆件为一圆管（内外半径分别为 R_1 和 R_2）.

解：函数

$$\chi=\frac{1}{4}(R_2^2-r^2)$$

（在极坐标中）在圆管截面的内外边界上满足条件（16.13），按公式（16.17）求出

$$C=\frac{\pi}{2}\mu(R_2^4-R_1^4).$$

习题 6　同习题 1，但杆件为任意截面的薄壁管.

解：由于管壁薄，可以认为沿着壁厚 h，函数 χ 按线性规律 $\chi=\chi_1 y/h$（y 为沿壁厚的坐标）从一侧的零变到另一侧的 χ_1. 于是，由条件（16.13）给出 $\chi_1 L/h=S$，其中 L 是管截面边界线的长度，而 S 是边界线包围的面积. 在表达式（16.17）中，第二项远小于第一项，于是我们得到

$$C=\frac{4hS^2\mu}{L}.$$

若把管沿着其中的一条纵向母线剪开，则抗扭刚度急剧下降，变为（根据习题 4 的结果）$C=\mu Lh^3/3$.

§ 17　杆的弯曲

杆弯曲时，一些地方受到拉伸，另外一些地方受到压缩. 在杆弯曲的凸起一侧的纤维拉长了，而在内凹一侧的纤维缩短了. 如同薄板的情形一样，在杆的内部沿着杆长存在一个"中性面"，在中性面上，既不发生拉伸也不发生压缩，它把杆划分为压缩区域和拉伸区域.

我们先从研究一小段杆的弯曲形变开始，可以认为它是小弯曲. 在这里对于小弯曲的理解是，不仅应变张量是小的，而且杆上各点位移的绝对值也是小的. 我们这样选择坐标系，使原点在所研究那段杆的中性面上，z 轴平行于未形变的杆轴，设弯曲发生在 zx 平面内. 在杆的小弯曲时，可以认为弯曲发生在单

一的平面内，这与下面微分几何中熟知的结果有关，即微弯的曲线对于平面的偏离（称为曲线的挠率）与曲率相比较是高阶小量.

类似于板弯曲和杆扭转的情形，在细杆弯曲时，作用在杆件侧表面上的外力与发生在杆件内部的应力相比较是个小量，故在确定边界条件时，可以认为这个侧表面上的外力等于零. 于是，在杆的全部侧表面上有 $\sigma_{ik}n_k=0$，又因为 $n_z=0$，所以

$$\sigma_{xx}n_x+\sigma_{xy}n_y=0,$$

令 $i=y,z$ 可写出另外两个类似的等式. 在杆件横截面的边界线上选择这样的点，使在该点处边界的法矢量 $\boldsymbol{n}$ 平行于 x 轴，另一个这样的点在对面边界的某点. 在这两点上 $n_y=0$，则由上面写出的等式有 $\sigma_{xx}=0$. 但是，因为假设杆本身很细，如果在截面的两边 σ_{xx} 为零，则沿着整个截面它也是小的，所以可以在整个杆中设 $\sigma_{xx}=0$. 用类似的分析方法使我们确信，所有的应力张量的分量除了 σ_{zz} 外全都等于零. 换句话说，在细杆弯曲时，应力张量的分量中只有拉伸（或压缩）的分量是比较大的. 只有应力张量之分量 σ_{zz} 不为零的形变，不是别的，正是简单拉伸或简单压缩的形变（§5）. 这样一来，在每一个弯曲杆的体元内都是发生简单拉伸（或压缩）. 自然，这个拉伸量的大小，在杆的每一个横截面上的不同点是不一样的，因此整个杆会发生弯曲.

不难确定杆件内每一点的相对伸长量. 我们考虑坐标原点附近平行杆轴方向的任一线元 $\mathrm{d}z$，在杆弯曲时，$\mathrm{d}z$ 的长度有所改变，设其变为等于 $\mathrm{d}z'$，只有位于中性面上的单元长度保持不变. 设 R 为坐标原点附近中性面的曲率半径，线元 $\mathrm{d}z$ 和 $\mathrm{d}z'$ 的长度，可以看作是具有相应半径为 R 和 $R+x$ 的圆周上之弧元的长度，其中 x 是线元 $\mathrm{d}z'$ 所在点的 x 坐标值. 因此

$$\mathrm{d}z'=\frac{R+x}{R}\mathrm{d}z=\left(1+\frac{x}{R}\right)\mathrm{d}z,$$

于是，相对伸长等于

$$\frac{\mathrm{d}z'-\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z}=\frac{x}{R}.$$

另一方面，线元 $\mathrm{d}z$ 的相对伸长等于应变张量的分量 u_{zz}. 因此

$$u_{zz}=\frac{x}{R}. \qquad (17.1)$$

现在，我们可以直接利用简单拉伸时存在的关系式 $\sigma_{zz}=Eu_{zz}$ 写出 σ_{zz}，这样一来

$$\sigma_{zz}=\frac{x}{R}E. \qquad (17.2)$$

直到现在为止，关于弯曲杆的中性面的位置仍然还没有确定. 它可以由如下的条件来确定，即我们这里所研究的形变必须是纯弯曲，杆没有任何总的拉伸或压缩，因此作用在杆横截面上的应力之合力必须等于零，也就是遍及横截面面

积取的积分

$$\int \sigma_{zz} \mathrm{d}f$$

必须等于零. 因此,用表达式(17.2)代替这里的 σ_{zz},则导出如下条件:

$$\int x \mathrm{d}f = 0. \tag{17.3}$$

另一方面,可以引入杆截面**惯性中心**的概念,它与相应形状均匀平板之惯性中心的公式是一样的. 惯性中心的坐标:

$$\frac{\int x \mathrm{d}f}{\int \mathrm{d}f}, \quad \frac{\int y \mathrm{d}f}{\int \mathrm{d}f}.$$

这样一来,条件(17.3)就表示在原点位于中性面的坐标系中,杆截面惯性中心的 x 坐标等于零. 换句话说,中性面就通过杆横截面的惯性中心.

应变张量之分量,除了 u_{zz}不等于零外,还有两个分量也不等于零,因为在简单拉伸时有 $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}$. 知道了应变张量后,也就不难求出该点的位移. 我们写出

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\sigma x}{R},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

积分这组方程可得到位移分量,表达式如下:

$$u_x = -\frac{1}{2R}[z^2 + \sigma(x^2 - y^2)], \quad u_y = -\sigma\frac{xy}{R}, \quad u_z = \frac{xz}{R}. \tag{17.4}$$

式中已置积分常数等于零,这就是说,坐标原点已经在空间里被固定住.

由公式(17.4)可见,位于横截面 $z = \text{const} \equiv z_0$ 上的点,弯曲后都处在下面给出的面上:

$$z = z_0 + u_z = z_0\left(1 + \frac{x}{R}\right).$$

我们看到,在所考虑的近似程度内,弯曲后的截面仍然保持为平面,只是相对于原来的初始位置旋转了某个角度. 但是,截面的形状已经改变了,比如矩形(设边长为 a 和 b)截面杆,截面边界上的两个侧边($y = \pm b/2$)在弯曲后占据了下面给出的位置:

$$y = \pm\frac{b}{2} + u_y = \pm\frac{b}{2}\left(1 - \frac{\sigma x}{R}\right),$$

亦即它变倾斜了,但仍然是直线. 而在边界的上下边($x = \pm a/2$)却弯成了抛物线形状(图 14):

$$x = \pm\frac{a}{2} + u_x = \pm\frac{a}{2} - \frac{1}{2R}\left[z_0^2 + \sigma\left(\frac{a^2}{4} - y^2\right)\right].$$

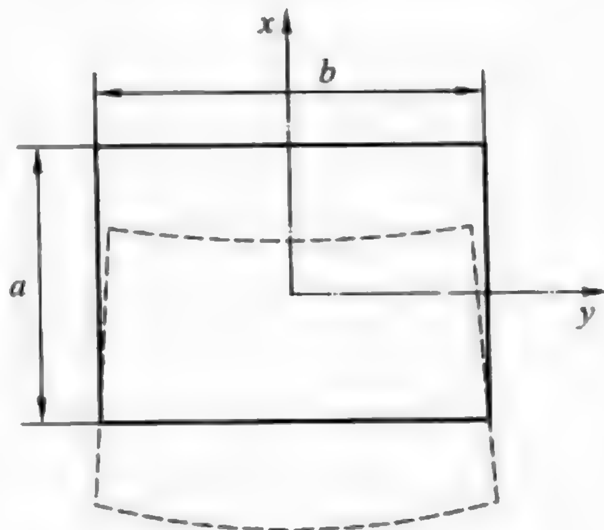


图 14

杆的单位体积自由能为

$$\frac{\sigma_{ik}u_{ik}}{2} = \frac{\sigma_{zz}u_{zz}}{2} = \frac{Ex^2}{2R^2},$$

它遍及整个横截面的积分为

$$\frac{E}{2R^2}\int x^2 \mathrm{d}f, \qquad (17.5)$$

此式即是弯曲杆在单位长度上的自由能. 式中的曲率半径 R 是中性面的曲率半径. 但是,由于杆细长,在同样的精度下,在这里,就可以把弯曲杆本身看作是一条没有粗细的曲线(通常称为**弹性曲线**),并简单的认为 R 就是弹性曲线的曲率半径.

在表达式(17.5)中,比较方便的是引入杆的横截面面积**惯性矩**的概念. 截面所在平面上关于 y 轴的截面惯性矩定义为积分

$$I_y = \int x^2 \mathrm{d}f, \qquad (17.6)$$

亦即,类似于一般力学中转动惯量的概念,其不同之处只不过是这里用面元 $\mathrm{d}f$ 代替了质量元. 于是,杆的单位长度自由能可以写为

$$\frac{E}{2R^2}I_y \qquad (17.7)$$

现在我们再来确定作用在杆件给定截面上的应力之力矩(该力矩称为**弯矩**). 附加于截面面元 $\mathrm{d}f$ 上的力为 $\sigma_{zz}\mathrm{d}f = \frac{x}{R}E\mathrm{d}f$,方向沿着 z 轴. 它关于 y 轴的矩为 $x\sigma_{zz}\mathrm{d}f$. 因此,关于 y 轴的总力矩为

$$M_y = \frac{E}{R}\int x^2 \mathrm{d}f = \frac{EI_y}{R}. \qquad (17.8)$$

因而,弹性曲线的曲率 $1/R$ 与所在截面上作用的弯矩成正比.

惯性矩 I_y 与 y 轴在截平面上的方向有关. 比较方便的办法是像通常在一般力学中那样,用两个所谓的**主惯性矩**来表示 I_y. 如果 θ 角是 y 轴与杆截面的一个**主惯性轴**的夹角,则

$$I_y = I_1\cos^2\theta + I_2\sin^2\theta, \qquad (17.9)$$

式中 I_1,I_2 是主惯性矩. 通过 z 轴和杆截面主惯性轴的平面称为弯曲的**主平面**.

例如,如果杆截面是矩形截面(边长为 a 和 b),则它的惯性中心位于矩形的中心,而主惯性轴平行于矩形的两个边. 主惯性矩为

$$I_1 = \frac{a^3 b}{12}, \qquad I_2 = \frac{ab^3}{12}. \qquad (17.10)$$

在圆截面(半径为 R)时,惯性中心位于圆心,而主惯性轴的方向是任意的. 绕截平面上通过中心的任何轴的惯性矩都等于

$$I=\frac{\pi R^4}{4}. \tag{17.11}$$

§18　形变杆的能量

在上一节中,我们只研究了沿着弯曲杆长度不大的一段. 现在转向研究整个杆的形变,我们必须首先选择一个描述这种形变的适当方式. 实际上,在杆经受大挠度弯曲时①,一般来说,在它弯曲的同时,还会产生某种扭转形变,所以是由纯弯曲和纯扭转组合的合成形变.

为了描述形变,比较方便的是按下述方法进行,即把整个杆划分为一系列无限小的单元,其中的每一个单元都是从杆的两个无限接近的横截面切取下来的. 在每一个这样的单元中引入自己的 ξ,η,ζ 坐标系,坐标轴方向的选择是这样的,在杆件未形变时所有的坐标系都彼此平行,并且所有 ζ 轴的方向都与杆轴平行. 在杆弯曲时,每一个单元上的坐标系都发生了转动,并且,一般来说,不同的单元转动的情况也不一样. 每两个无限邻近的坐标系,形变时都相互转动了一个无限小的角度.

设 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ 是沿杆长度距离为 $\mathrm{d}l$ 的两个坐标系相对旋转的角矢量(众所周知,无限小的旋转角可以看作是沿着旋转轴方向的一个矢量,它的三个分量是绕着每个坐标轴的旋转角).

为了描述形变,我们引入矢量

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}l}, \tag{18.1}$$

它给出坐标轴沿着杆长的旋转"速度". 如果形变是纯扭转,则依次旋转的坐标系,只发生绕杆轴即绕 ζ 轴的旋转. 因而,在这种情形下,矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的方向与杆轴同向,它不是别的,正是我们在 §16 已经应用过的扭转角 τ. 所以,在任意形变的一般情形下,与此相对应地可以把矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量 Ω_ζ 称为扭转角. 而当杆在某一平面内做纯弯曲时,矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 就没有分量 Ω_ζ,亦即每一点的矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 全都处于 $\xi\eta$ 平面上. 如果这时将发生弯曲的平面选作 $\xi\zeta$ 面,则每一点都将产生环绕 η 轴的旋转,亦即 $\boldsymbol{\Omega}$ 的方向与 η 轴的方向相同.

这里简单地把杆看作弹性曲线,我们引入单位矢量 $\boldsymbol{t}$,其方向与杆相切.

---

① 注意,这里的大挠度弯曲,我们指的是这样的形变,即位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 不是小量,而应变张量和以前一样,仍是小量.

导数 $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}l$ 称为曲线的曲率矢量，它的绝对值等于 $1/R$（R 为曲率半径①），它的方向称为曲线的主法线方向. 在无限小旋转时，矢量的改变等于旋转角矢量与单位矢量 $\boldsymbol{t}$ 的矢量积. 因此，弹性曲线上无限邻近两点的矢量 $\boldsymbol{t}$ 之差可以写为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{t},$$

或将其除以 $\mathrm{d}l$：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{t}. \tag{18.2}$$

再用 $\boldsymbol{t}$ 矢量乘等式两边，得

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{t} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l} + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\Omega}). \tag{18.3}$$

在每一点切矢量的方向都与该点的 ζ 轴方向相同，所以 $\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \Omega_\zeta$. 引入单位主法矢量 $\boldsymbol{n}$，因而 $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}l = \boldsymbol{n}/R$，于是，式(18.3)可以写为

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{R}\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n} + \boldsymbol{t}\Omega_\zeta. \tag{18.4}$$

右边第一项是具有两个分量 Ω_ξ, Ω_η 的矢量. 众所周知，单位矢量 $\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$ 称为单位副法矢量. 因而，分量 Ω_ξ, Ω_η 就组成一个矢量，其方向与杆的副法线方向相同，绝对值等于曲率 $1/R$.

这样一来，我们就弄清楚了所引入的矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 描述形变的性质，就可以导出弯曲杆的弹性自由能表达式. 弹性能（关于单位长度杆的）是应变的二次函数，在当前的情形下，是矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 之分量的二次函数. 不难看出，这个二次型应该没有与 $\Omega_\xi\Omega_\zeta$ 或 $\Omega_\eta\Omega_\zeta$ 成比例的项. 实际上，由于整个杆沿着长度是均匀的，故所有的量，特别是能量在改变 ζ 坐标的正方向（即用 $-\zeta$ 代换 ζ）时不应该有所变化，但是在作这种代换时，上述的乘积却改变了自己的符号.

至于带有平方项的 Ω_ζ^2，则必须记住，当 $\Omega_\xi = \Omega_\eta = 0$ 时，涉及的是纯扭转，这时的能量表达式与在 §16 中得到的表达式应该是一致的. 这样一来，自由能的相应项具有如下形式：

$$\frac{1}{2}C\Omega_\zeta^2$$

最后，根据表达式(17.7)可以用 Ω_ξ, Ω_η 的平方项写出小弯曲时不长一段杆的自由能. 假设杆件只受到小弯曲，并将弯曲平面选作 $\xi\zeta$ 平面，这样分量 Ω_ξ 消失，同时在小弯曲时也不存在扭转. 在这种情形下，能量表达式应该与式(17.7)一致：

① 注意，任何一条空间曲线都是由每一点的曲率和挠率来描述的. 这个挠率（我们不引用）不应与我们这里称为形变的扭转相混淆，后者是绕杆轴的转动.

$$\frac{E}{2R^2}I_\eta.$$

但是，我们看到，$1/R^2$ 恰好是平面矢量(Ω_ξ,Ω_η)的二次方，因此能量应该具有如下形式：

$$\frac{E}{2}I_\eta\Omega_\eta^2.$$

在任意选择 ξ,η 轴时，这个表达式可以写为材料力学中所熟知的那种形式：

$$\frac{E}{2}(I_{\eta\eta}\Omega_\eta^2+2I_{\eta\xi}\Omega_\eta\Omega_\xi+I_{\xi\xi}\Omega_\xi^2),$$

式中 $I_{\eta\eta},I_{\eta\xi},I_{\xi\xi}$ 是杆截面惯量张量的分量．比较方便的是这样选择 ξ,η 轴，使之与杆截面主惯性轴一致，这时将具有简单的形式：

$$\frac{E}{2}(I_1\Omega_\xi^2+I_2\Omega_\eta^2),$$

式中 I_1,I_2 是截面主惯性矩．因为 Ω_ξ^2 和 Ω_η^2 的系数是常数，所以得到的表达式在大挠度弯曲时也必然成立．

最后，沿着整个杆积分，我们最终得到关于弯曲杆的弹性自由能的如下表达式：

$$F_{\text{rod}}=\int\left\{\frac{I_1E}{2}\Omega_\xi^2+\frac{I_2E}{2}\Omega_\eta^2+\frac{C}{2}\Omega_\zeta^2\right\}\mathrm{d}l. \tag{18.5}$$

下面，我们通过 $\boldsymbol{\Omega}$ 来表示作用在杆截面上的力矩．这并不难做到，只需我们再一次利用前面对于纯扭转和小纯弯曲所得到的结果．在纯扭转时，相对于杆轴的力矩等于 $C\tau$．由此断定，在一般情形下，关于 ζ 轴的力矩 M_ζ，应有$M_\zeta=C\Omega_\zeta$．另外，在 $\xi\zeta$ 平面作小弯曲时，相对于 η 轴的力矩为 EI_2/R．但是，在这样的弯曲时，矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的方向是沿着 η 轴方向的，所以 $1/R$ 自然是它的绝对值，因而 $EI_2/R=EI_2\Omega$．由此断定，在一般情形下，应有 $M_\xi=EI_1\Omega_\xi,M_\eta=EI_2\Omega_\eta$（选择截面主惯性轴为 ξ,η 轴）．这样一来，力矩矢量 $\boldsymbol{M}$ 的分量分别为

$$M_\xi=EI_1\Omega_\xi,\quad M_\eta=EI_2\Omega_\eta,\quad M_\zeta=C\Omega_\zeta. \tag{18.6}$$

弹性能(18.5)通过力矩来表示，有如下形式：

$$F_{\text{rod}}=\int\left\{\frac{M_\xi^2}{2I_1E}+\frac{M_\eta^2}{2I_2E}+\frac{M_\zeta^2}{2C}\right\}\mathrm{d}l. \tag{18.7}$$

弯曲杆的最重要情形是小挠度弯曲．此时，在杆的整个长度上，离开它初始位置的偏离与杆的长度相比是小的．因此在这种情形下，可以认为不存在扭转，这样就可以设 $\Omega_\zeta=0$，从而由式(18.4)自然有

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{R}\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}\equiv\boldsymbol{t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l}. \tag{18.8}$$

现在我们引入在空间固定不动的坐标系 x,y,z(代替在每一点都受杆约束的坐标系 ξ,η,ζ),z 轴沿着未形变的杆轴. 用 X,Y 表示杆件弹性曲线上各点的 x,y 坐标,弹性曲线上各点从初始状态到弯曲状态的位移由 X,Y 确定.

因为弯曲小,切矢量 $\boldsymbol{t}$ 几乎平行 z 轴,所以可以近似地认为 $\boldsymbol{t}$ 的方向沿着 z 轴. 另外,单位切矢量等于曲线上点的径矢 $\boldsymbol{r}$ 对于杆长的导数:

$$\boldsymbol{t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}.$$

于是,我们有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l^2}\approx\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}z^2}$$

(对于杆长的导数可以近似的用对 z 的导数代替). 特别是,这些矢量的 x 分量和 y 分量分别等于 $\mathrm{d}^2X/\mathrm{d}z^2$ 和 $\mathrm{d}^2Y/\mathrm{d}z^2$. 在具有同样精度的情形下,分量 Ω_ξ 和 Ω_η 现在等于 Ω_x 和 Ω_y,而由式(18.8)可得

$$\Omega_\xi=-\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}z^2},\quad \Omega_\eta=\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}z^2}. \tag{18.9}$$

将该式代入(18.5),我们得到如下形式的小弯曲杆的弹性形变能:

$$F_{\mathrm{rod}}=\frac{F}{2}\int\left\{I_1\left(\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}z^2}\right)^2+I_2\left(\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}z^2}\right)^2\right\}\mathrm{d}z. \tag{18.10}$$

注意 I_1,I_2是关于 x,y 轴(这里是主惯性轴)的惯性矩.

特别是,对于圆截面杆,$I_1=I_2\equiv I$,因此被积函数表达式变为简单的二次导数的平方和,在所考虑的近似范围内,可近似地等于杆曲率的平方,即

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}z^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}z^2}\right)^2\approx\frac{1}{R^2}.$$

因此,公式(18.10)可以自然的推广到未形变状态(自然状态)是任意圆形截面的非直线杆(即曲杆)的小弯曲问题. 对此,应将弯曲能写为如下形式:

$$F_{\mathrm{rod}}=\frac{EI}{2}\int\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)^2\mathrm{d}z, \tag{18.11}$$

式中 R_0是自然状态(未形变状态)下杆上任意一点的曲率半径. 照理,这一表达式,在未形变状态($R=R_0$)具有最小值,而在 $R_0\to\infty$ 时变为公式(18.10).

§19 杆的平衡方程

我们现在可以转向弯曲杆平衡方程的推导. 仍然研究用两个无限接近的截面切取的任意一个无限小杆元,并且计算作用在它上面的合力. 我们用 $\boldsymbol{F}$ 表示

附加在杆件横截面面积上的应力之合力①②，该力矢量的分量等于 σ_{iz} 遍及截面面积的积分：

$$F_i = \int \sigma_{iz} \mathrm{d}f. \tag{19.1}$$

如果把两个无限接近的截面作为切取杆元的端面，则在上端面作用的力为 $\boldsymbol{F} + \mathrm{d}\boldsymbol{F}$，而在下端面作用的力为 $-\boldsymbol{F}$，它们的和是微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$. 其次，设 $\boldsymbol{K}$ 是作用在单位长度杆上的外力，于是在杆元 $\mathrm{d}l$ 上作用的外力为 $\boldsymbol{K}\mathrm{d}l$. 因而，作用在该杆元上的全部力之合力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{K}\mathrm{d}l$. 在平衡时这个力必须等于零. 这样一来，我们就得到：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}l} = -\boldsymbol{K}. \tag{19.2}$$

第二个方程可由附加在该单元的合力矩为零的平衡条件得到. 设 $\boldsymbol{M}$ 是作用在杆的横截面面积上由应力合成的力矩，这个对横截面内某点（坐标原点）所取的力矩，其分量由公式（18.6）确定. 现在来计算附加于所给杆元端面上某点（称为 O 点）的合力矩. 这时，在上端面上的应力给出的力矩为 $\boldsymbol{M} + \mathrm{d}\boldsymbol{M}$. 在杆元下端面上的应力对 O 点之力矩，由该应力对下端面内的坐标原点（O'点）之力矩 $-\boldsymbol{M}$ 和作用在下端面上的力 $-\boldsymbol{F}$ 对 O 点的力矩相加得到，这后一个力矩等于 $(-\mathrm{d}\boldsymbol{l}) \times (-\mathrm{d}\boldsymbol{F})$，其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是从 O'到 O 之间的杆元矢量. 而外力 $\boldsymbol{K}$ 的力矩是高阶小量. 于是，作用在杆元上的总力矩为 $\mathrm{d}\boldsymbol{M} + \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{F}$. 在平衡时，它必须等于零，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M} + \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{F} = 0.$$

将该等式除以 $\mathrm{d}l$，并代以 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}/\mathrm{d}l = \boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{t}$ 是杆（现在把它看作曲线）的单位切矢量，我们得到如下方程：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}l} = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{t}. \tag{19.3}$$

方程（19.2）和（19.3）就是杆在任何形式弯曲时的完全平衡方程组.

如果作用在杆上的外力是通常所说的集中力，亦即外力仅仅附加在杆上一些个别的孤立点上，则在附加力点之间那部分杆段上平衡方程明显的被简化了. 由式（19.2），当 $\boldsymbol{K} = 0$ 时，我们有

$$\boldsymbol{F} = \text{const}. \tag{19.4}$$

即沿着作用力之间的任一杆段的杆长，内力都是常值，它由作用在 1 点与 2 点上的两个力之差 $\boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{F}_1$ 来确定，即

---

① 用 $\boldsymbol{F}$ 表示力并不会与自由能相混淆，在下面的 §19—21，我们将不利用自由能.

② 亦称为该横截面上的内力，其分量是：垂直于横截面的轴力，和位于横截面上的剪力（通常将其分解为两个相互正交的剪力）.　　——译者注

$$\boldsymbol{F}_2-\boldsymbol{F}_1=-\sum\boldsymbol{K},\tag{19.5}$$

式中的求和是指对附加在1点与2点之间的杆段上的所有外力求和. 注意,在差 $\boldsymbol{F}_2-\boldsymbol{F}_1$ 中,2点离开杆长(即弧长 l)的起算点比1点更远. 这一点在确定等式(19.5)的符号时是很重要的. 特别是,如果在杆上总共只有一个集中力 $\boldsymbol{f}$ 附加在杆的自由端,则 $\boldsymbol{F}$ 沿着整个杆长是常值,并等于 $\boldsymbol{f}$.

第二个平衡方程(19.3)也可以简化. 将式中的 $\boldsymbol{t}$ 写为 $\boldsymbol{t}=\mathrm{d}\boldsymbol{l}/\mathrm{d}l=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}l$(其中 $\boldsymbol{r}$ 是从某给定点到杆上任意点的径矢)并积分,由于 $\boldsymbol{F}$ 是常值,我们得到

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r}+\text{const}.\tag{19.6}$$

如果连这样的集中力也不存在,杆的弯曲是由于附加集中力矩(即集中力偶)的作用产生的,则在沿着杆的整个长度上,$\boldsymbol{F}=\text{const}$;而在附加集中力偶的点上 $\boldsymbol{M}$ 发生突变,其值等于它的力矩.

其次,我们来研究关于弯曲杆两端的边界条件问题. 在这里,可以提出几种不同的情况.

如果杆端不可能发生任何的位移(不论是纵向的,还是横向的),同时也不能有方向(杆端的切线方向)的改变,则称为**固定端**(见第51页之图4(a)). 在这种情形下,边界条件包括给定杆端坐标(位移)和单位切矢量 $\boldsymbol{t}$(转角). 而固定点处,由支座给杆端的反作用力和反作用力矩要在解方程的结果中确定.

相反的情形是杆的**自由端**. 在这种情形下,杆端的坐标和方向都是任意的,边界条件是在杆端上的力 $\boldsymbol{F}$ 和力矩 $\boldsymbol{M}$ 必须为零①.

如果杆端是**固定球铰**②,则它不能发生任何的位移,但是,它的方向不是给定的. 作用在这样可以自由转动一端上的力矩必须为零.

最后,如果杆支承在支座的若干个点上(图4(b)),则它可以沿着这些点滑动,但是它不能发生横向位移. 在这种情形下,$\boldsymbol{t}$ 的方向和支点沿杆长的位置都是不定的. 由于杆可以自由转动,故在支点上的力矩必须等于零,而在这些点上,力 $\boldsymbol{F}$ 必须垂直于杆,力的纵向分量使杆在支点上引起进一步的滑动.

不难用类似的方法,建立杆在其它固定方式时的边界条件. 这个问题,我们到此为止,只局限于导出的几个典型例子.

在上一节开始就已经指出,任意截面杆的大挠度弯曲,即使对杆没有外加任何扭矩,一般来说,杆也会同时伴随有扭转发生. 但是,杆在主平面内的弯曲是

---

① 如果在自由端附加集中力 $\boldsymbol{f}$,则边界条件将不再是 $\boldsymbol{F}=0$,而是 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{f}$.

② 这样的固定方式通常称为"固定铰支",下一段讲的是"可动铰支","铰支"也称为"简支",而上一段讲的固定端就是所谓的"固支". ——译者注

个例外，在这样的弯曲时，不会产生扭转. 对于圆截面杆，无论什么样的弯曲，都不会伴随有扭转发生(当然，如果没有外加扭矩的话). 在此可以说明如下：扭转可由矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量 $\Omega_\zeta=\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{t}$ 确定，我们计算它对杆长的导数，并注意到 $\Omega_\zeta=M_\zeta/C$，对此我们可以写出：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{t})=C\frac{\mathrm{d}\Omega_\zeta}{\mathrm{d}l}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}l}\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{M}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l}.$$

将式(19.3)代入上式，这时第一项化为零，于是

$$C\frac{\mathrm{d}\Omega_\zeta}{\mathrm{d}l}=\boldsymbol{M}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l}.$$

对于圆截面杆，$I_1=I_2\equiv I$，因此，根据式(18.3)和(18.6)可将 $\boldsymbol{M}$ 写为

$$\boldsymbol{M}=EI\boldsymbol{t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l}+\boldsymbol{t}C\Omega_\zeta. \tag{19.7}$$

在乘以 $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}l$ 时，右边两项得零，于是 $\mathrm{d}\Omega_\zeta/\mathrm{d}l=0$，由此

$$\Omega_\zeta=\text{const}. \tag{19.8}$$

亦即，沿杆长扭转角为常量. 如果在杆端部没有附加扭矩，则在端部 Ω_ζ 等于零. 因此，在杆的整个长度上都没有发生扭转.

这样一来，对于圆截面杆，在纯弯曲时，可以写出

$$\boldsymbol{M}=EI\boldsymbol{t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l}=EI\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l^2}. \tag{19.9}$$

将该表达式代入式(19.3)即导出圆截面杆纯弯曲的方程式：

$$EI\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l^3}=\boldsymbol{F}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}. \tag{19.10}$$

习　　题

习题 1　设有一圆截面杆(弹性棒)，对它附加集中力，使杆在一个平面内作大挠度弯曲，试导出确定杆形状问题的积分.

解：我们来研究加力点之间的一杆段，在这样的杆段里 $\boldsymbol{F}=\text{const}$. 选择弯曲平面作为 xy 平面，而 y 轴平行于力 $\boldsymbol{F}$. 引入杆的切线与 y 轴的夹角 θ，于是，$\mathrm{d}x/\mathrm{d}l=\sin\theta$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}l=\cos\theta$，其中 x,y 为杆上点的坐标. 在式(19.10)中展开矢量积，我们得到关于 θ(作为弧长 l 的函数)的方程：

$$IE\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}l^2}-F\sin\theta=0.$$

取一次积分得出

$$\frac{IE}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\right)^2+F\cos\theta=c_1,$$

由此

$$l = \pm\sqrt{\frac{IE}{2}}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{c_1 - F\cos\theta}} + c_2. \tag{1}$$

函数 $\theta(l)$ 可以由此通过椭圆积分表示. 坐标 $x = \int\sin\theta\mathrm{d}l, y = \int\cos\theta\mathrm{d}l$, 于是我们得到:

$$x = \pm\frac{1}{F}\sqrt{2IE}\sqrt{c_1 - F\cos\theta} + \text{const},$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{IE}{2}}\int\frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{c_1 - F\cos\theta}} + \text{const}'. \tag{2}$$

式(19.9)中的力矩 $\boldsymbol{M}$, 方向沿着 z 轴, 值为

$$M = IE\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}.$$

习题 2 设有一杆, 一端夹紧(固支), 而另一端为自由端, 在端点附加力 $\boldsymbol{f}$, 其方向垂直于未形变的直杆. 试确定杆受到大挠度弯曲时的形状(图 15).

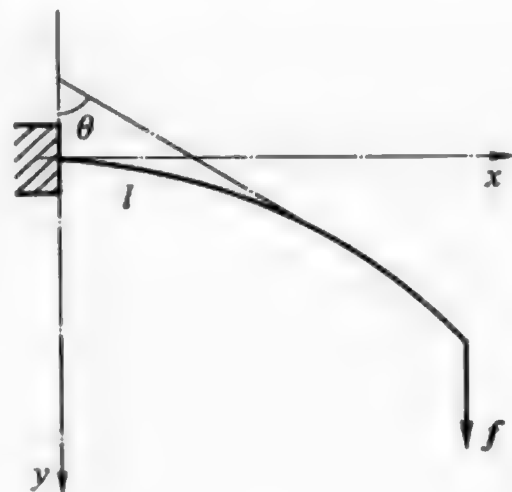


图 15

解: 在杆的整个长度上, $\boldsymbol{F} = \text{const} = \boldsymbol{f}$. 在固定端($l = 0$), $\theta = \pi/2$; 而在自由端($l = L$, 其中 L 为杆长), $M = 0$, 即 $\theta' = 0$. 引用记号 $\theta_0 = \theta(L)$, 在式(1)中有 $c_1 = f\cos\theta_0$, 于是

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}}\int_\theta^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$

由此得到确定 θ_0 的方程:

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$

杆的形状由如下公式确定:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}}\left(\sqrt{\cos\theta_0} - \sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}\right),$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2f}}\int_\theta^{\pi/2}\frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$

习题 3 同习题 2, 但力 $\boldsymbol{f}$ 加于自由端并平行于未形变时的杆长.

解: 我们有 $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{f}$(坐标轴的选取, 表示在图 16 上). 边界条件: $l = 0$ 时, $\theta = 0$; $l = L$ 时, $\theta' = 0$. 我们有

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}}\int_0^\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}},$$

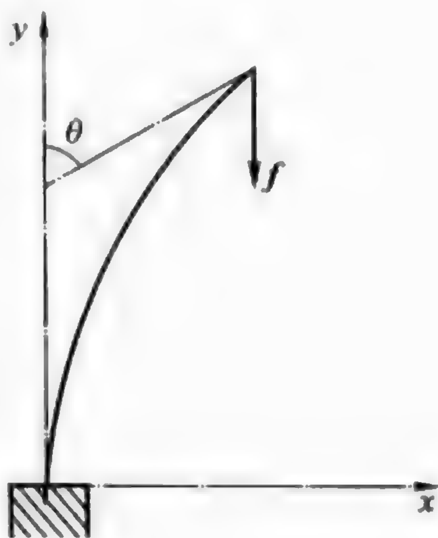


图 16

式中的 θ_0 由 $l(\theta_0)=L$ 确定. 对于 x 和 y, 我们得到:

$$x=\sqrt{\frac{2IE}{f}}\left(\sqrt{1-\cos\theta_0}-\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}\right),$$

$$y=\sqrt{\frac{IE}{2f}}\int_0^{\theta}\frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}.$$

在小挠度弯曲时, $\theta_0\ll 1$, 因而可以写为

$$L\approx\sqrt{\frac{IE}{f}}\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{IE}{f}},$$

亦即, θ_0 没有在这一关系式中出现. 这就表明, 与 §21 习题 3 的结果是一致的: 上述的解, 只有在 $f\geqslant\pi^2IE/(4L^2)$ 时, 即失去直线形状的稳定性之后才存在.

习题 4　同习题 2, 但是, 杆的两端支承在支座上, 而在杆的中点附加力 $\boldsymbol{f}$, 两支点间的距离为 L_0.

解: 坐标轴的选择见图 17, 在 AB 段和 BC 段上力 $\boldsymbol{F}$ 均为常量, 并且在支点 A 和 C 处它们都与杆垂直. 在 AB 段和 BC 段上力 $\boldsymbol{F}$ 的差值等于 $\boldsymbol{f}$. 由此断定, 在 AB 段 $F\sin\theta_0=-f/2$, 其中, θ_0 为 y 轴与 AC 线的夹角. 在点 $A(l=0)$ 处的条件: $\theta=\pi/2$ 和 $M=0$, 即 $\theta'=0$. 于是, 在 AB 段有

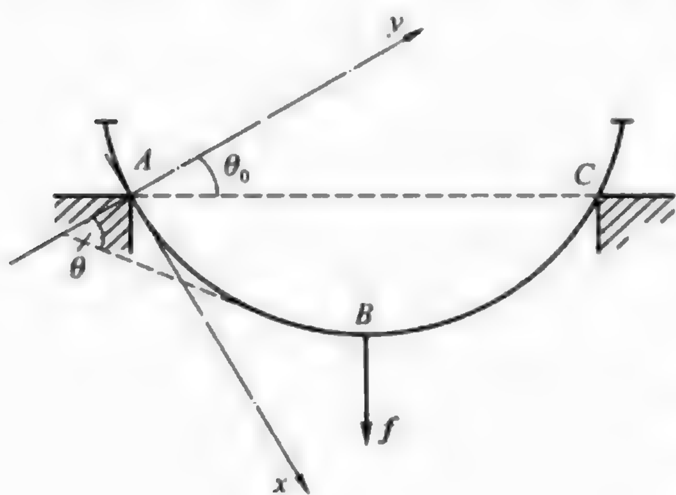


图 17

$$l=\left(\frac{IE}{f}\sin\theta_0\right)^{1/2}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta}},$$

$$x=2\left(\frac{IE}{f}\sin\theta_0\cos\theta\right)^{1/2},$$

$$y=\left(\frac{IE}{f}\sin\theta_0\right)^{1/2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos\theta}\mathrm{d}\theta.$$

角 θ_0 由曲线 AB 在直线 AC 上的投影必须等于 $L_0/2$ 的条件确定, 由此可得

$$\frac{L_0}{2}=\left(\frac{IE}{f}\sin\theta_0\right)^{1/2}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{\cos(\theta-\theta_0)}{\sqrt{\sin\theta}}\mathrm{d}\theta.$$

当 θ_0 的某些确定值在 0 和 $\pi/2$ 之间时, 导数 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\theta_0$ (其中 f 被看作是 θ_0 的函数) 为零和正数. 当 θ_0 进一步减小, 亦即挠度增加时, 对应的 f 将减小. 这就是说, 所求的解是不稳定的, 杆在两个支座之间“崩溃”了.

习题 5　试推导空间大挠度弯曲杆承受集中力作用问题的积分.

解: 我们研究两个加力点之间的杆段, 在这段杆上, $\boldsymbol{F}=\mathrm{const}$. 对式 (19.10) 积分, 我们得到

$$EI\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l^2}=\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r}+c\boldsymbol{F}. \tag{1}$$

上式将积分常数写为矢量形式 $c\boldsymbol{F}$,其方向与 $\boldsymbol{F}$ 相同,这是因为适当的选择坐标原点,亦即对 $\boldsymbol{r}$ 增加某个常矢量,可以消除与 $\boldsymbol{F}$ 垂直的附加矢量. 将式(1)分别按标量积和矢量积乘以 $\boldsymbol{r}'$(撇号′表示对 l 取导数),并注意到 $\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}''=0$(因为 $\boldsymbol{r}'^2=1$)即得到

$$\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')+c\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}'=0,\quad EI\boldsymbol{r}''=(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{r}'+c\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r}'.$$

其分量(z 轴选为 $\boldsymbol{F}$ 方向)为

$$(xy'-yx')+cz'=0,\quad EIz''=-F(xx'+yy').$$

在这些方程中引入柱坐标 r,φ,z,则得

$$r^2\varphi'+cz'=0,\quad EIz''=-Frr'. \tag{2}$$

由第二个方程得

$$z'=\frac{F}{2EI}(A-r^2), \tag{3}$$

式中 A 为常数. 联合式(2)和(3)以及恒等式

$$r'^2+r^2\varphi'^2+z'^2=1,$$

我们得到

$$\mathrm{d}l=\frac{r\mathrm{d}r}{G(r)},\quad G(r)=\left[r^2-\frac{F^2}{4E^2I^2}(r^2+c^2)(A-r^2)^2\right]^{1/2},$$

然后由(2)和(3)求得

$$z=\frac{F}{2EI}\int\frac{(A-r^2)r}{G(r)}\mathrm{d}r,$$

$$\varphi=-\frac{cF}{2EI}\int\frac{A-r^2}{rG(r)}\mathrm{d}r.$$

该式给出了弯曲杆的形状.

习题 6 有一圆截面杆受到扭转(单位扭转角为 τ)并弯曲成为螺旋线的形状. 试确定为了维持这样的状态在杆的端部需要附加的力和力矩.

解:设 R 为圆柱的半径,在圆柱的表面上有螺旋线(取 z 轴沿圆柱轴),α 为螺旋线的切线与垂直于 z 轴的平面之间的夹角,螺旋线的螺距 h 与 α 和 R 的关系为 $h=2\pi R\tan\alpha$. 螺旋线方程:

$$x=R\cos\varphi,\quad y=R\sin\varphi,\quad z=\varphi R\tan\alpha$$

(φ 是围绕 z 轴的旋转角). 弧元的长度 $\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\varphi/\cos\alpha$. 将这些表达式代入式(19.7),计算出矢量 $\boldsymbol{M}$ 的分量,然后按公式(19.3)即可求出力 $\boldsymbol{F}$(沿着整个杆长是常量). 最后,我们得到力 $\boldsymbol{F}$,其方向沿着 z 轴,大小等于

$$F_z = F = C\tau\frac{\sin\alpha}{R} - \frac{EI}{R^2}\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

力矩 $\boldsymbol{M}$ 沿 z 轴的分量：

$$M_z = C\tau\sin\alpha + \frac{EI}{R}\cos^3\alpha,$$

而分量 M_φ，其方向在杆的任一点上都与圆柱横截面圆周相切，并且 $M_\varphi = FR$.

习题 7 试确定两点之间悬挂的柔索在重力场中的形状（对于柔索，与抗拉强度相比，抗弯强度可以忽略）.

解：将柔索所在的平面选作 xy 平面，并使 y 轴的方向铅垂向下. 因为 $\boldsymbol{M}$ 与 EI 成比例，所以在方程（19.3）中可以忽略 $\mathrm{d}\boldsymbol{M}/\mathrm{d}l$ 项，于是 $\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{t}=0$，即在柔索的任意一点上，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{t}$ 的方向相同，并且可以写为 $\boldsymbol{F}=F\boldsymbol{t}$. 方程（19.2）现在给出下面的形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(F\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\right)=0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(F\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\right)=q$$

（q 是柔索单位长度的重量）. 由此得到

$$F\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}=c, \quad F\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}=ql.$$

于是 $F=\sqrt{c^2+q^2l^2}$，这样即有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}=\frac{A}{\sqrt{A^2+l^2}}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}=\frac{l}{\sqrt{A^2+l^2}}$$

（其中 $A=c/q$）积分上式，得出

$$x = A\operatorname{arsinh}\frac{l}{A}, \quad y=\sqrt{A^2+l^2}.$$

由此

$$y = A\cosh\frac{x}{A},$$

亦即，柔索的形状是一条悬链线. 坐标原点和常数 A 的选择，取决于曲线必须通过的两个给定点和具有给定的长度.

§20 杆的小挠度弯曲

在实际中，最重要的情形是杆的小挠度弯曲，它使平衡方程极大的简化了. 如果杆切线方向的单位矢量 $\boldsymbol{t}$ 沿着杆长缓慢的变化，即导数 $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}l$ 很小，就是所谓的小挠度弯曲. 换句话说，小挠度弯曲就是弯曲杆上每一点的曲率半径必须远远大于杆长. 实际上，这个条件与要求杆的横向挠度远小于杆的长度是一致的. 我们着重指出，此时，决不是要求挠度比杆的厚度小，这在板的小挠度弯曲

近似理论中是必须要求的，已经在§11—12中论述过了①.

将式(19.3)对长度求导，得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}l^2}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}l}\times\boldsymbol{t}+\boldsymbol{F}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l}. \tag{20.1}$$

第二项含有小量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l}$，它通常（某些特殊情形除外，这些将在后面讲述）是可以忽略的. 在第一项里，将 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}/\mathrm{d}l=-\boldsymbol{K}$ 代入式中，即得到如下形式的平衡方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}l^2}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{K}. \tag{20.2}$$

我们将该方程写为分量形式，为此，将式(18.6)和(18.9)代入，则得

$$M_x=-EI_1Y'',\quad M_y=EI_2X'',\quad M_z=0 \tag{20.3}$$

（式中的撇号′表示对 z 取导数）. 可以认为单位矢量 $\boldsymbol{t}$ 的方向与 z 轴方向相同. 于是，我们得到

$$EI_2X''''-K_x=0,\quad EI_1Y''''-K_y=0. \tag{20.4}$$

这组方程确定了挠度 X 和 Y 与 z 的关系，即小挠度弯曲杆的形状.

作用在杆横截面上的内力 $\boldsymbol{F}$，同样可以用 X 和 Y 的导数来表示. 将式(20.3)代入(19.3)，得到

$$F_x=-EI_2X''',\quad F_y=-EI_1Y'''. \tag{20.5}$$

我们知道，二阶导数确定的是由应力合成的力矩，而三阶导数确定的是力，式(20.5)表示的力称为**剪力**. 如果弯曲是由集中力产生的，则在沿着附加力点之间的每一个杆段上，剪力是个常值，而在每一个附加力的点上剪力发生了突变，其突变值等于附加的外力. 量 EI_2 和 EI_1 分别称为杆在主平面 xz 和 yz 上的抗弯刚度②.

如果附加于杆的外力作用在同一个平面内，则杆的弯曲也发生在同一个平面内. 但是，在一般情形下，这两个平面彼此并不重合，可以很容易的求出它们

---

① 我们没有全面阐述在未形变的自然状态下已有弯曲形状杆件（即曲杆）的复杂弯曲理论（曲杆弯曲的内容，这里仅限于本节习题8和习题9的简单例题）.

② 用形如

$$DX''''-K_x=0 \tag{20.4a}$$

的方程也可以描述薄板弯曲的某种极限情形. 设矩形板（边长为 a 和 b，板厚 h）沿着 a 边（y 方向）固定，并沿着 b 边（z 轴）弯曲，沿着 y 轴均匀加载. 在任意 a 和 b 的一般情形下，为了确定弯曲，必须应用二维方程(12.5)及板在固定边上和自由边上的边界条件. 在 $a\gg b$ 的极限情形下，可以认为沿着 y 轴形变是均匀的，这时，二维平衡方程变为式(20.4a)的形式，在弯曲时起刚度作用的量是

$$D=\frac{Eh^3a}{12(1-\sigma^2)}.$$

而方程(20.4a)应用于相反的极限情形是 $a\ll b$，这时的板可以看作是长度为 b 并具有狭矩形截面（矩形截面的边为 a 和 h）的杆. 但是，这时的弯曲刚度由另外的表达式确定，即 $D=EI_2=Eh^3a/12$.

之间的夹角．如果 α 是力的作用平面与第一个弯曲主平面（xz 平面）的夹角，则平衡方程具有如下形式：

$$X'''' = \frac{\cos\alpha}{I_2 E}K, \quad Y'''' = \frac{\sin\alpha}{I_1 E}K.$$

两个方程的区别仅仅是 K 前面的系数，因此 X 和 Y 彼此成比例，并且

$$Y = X\frac{I_2}{I_1}\tan\alpha.$$

弯曲平面与 xz 平面之间的夹角 θ 由下面的等式确定：

$$\tan\theta = \frac{I_2}{I_1}\tan\alpha. \tag{20.6}$$

对于圆截面杆，$I_1 = I_2$，$\alpha = \theta$，亦即弯曲发生在力的作用平面内．对于任意截面杆，当 $\alpha = 0$，亦即力作用在主平面上时，上面的结论同样是正确的．对于挠度，其绝对值

$$\zeta = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

满足下面的方程：

$$EI\zeta'''' = K, \quad I = \frac{I_1 I_2}{\sqrt{I_1^2\cos^2\alpha + I_2^2\sin^2\alpha}}. \tag{20.7}$$

剪力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 位于同一个平面内，其大小为

$$F = -EI\zeta'''. \tag{20.8}$$

这里的 I 是杆的"等效"截面惯性矩．

我们以显式形式写出小挠度弯曲杆平衡方程的边界条件．如果杆端固定，则此处必须是 $X = Y = 0$，同时，也不能有方向的改变，亦即必须是 $X' = Y' = 0$．这样一来，在杆的固定端，必须满足如下的边界条件：

$$X = Y = 0, \quad X' = Y' = 0. \tag{20.9}$$

在支点处的反作用力和反作用力矩，根据已知的解分别由公式（20.5）和（20.3）确定．

当杆的弯曲足够小时，将杆的端部固定在铰上和支承在一点上，两者在边界条件方面是等价的．实际上，在后者的情形下，在小挠度弯曲时，杆在支点的纵向位移与横向挠度相比是二阶小量，因此可以认为它等于零．在这两种情形下，由横向位移和力矩为零给出边界条件：

$$X = Y = 0, \quad X'' = Y'' = 0. \tag{20.10}$$

在支点处，杆端的方向和反作用力需在求解方程的结果中确定．

最后，在自由端上，力 $\boldsymbol{F}$ 和力矩 $\boldsymbol{M}$ 必须为零．根据式（20.3）和（20.5）得到边界条件：

$$X'' = Y'' = 0, \quad X''' = Y''' = 0 \tag{20.11}$$

(如果在自由端处加集中力,则 $\boldsymbol{F}$ 必须等于该力,而不再为零).

不难将方程(20.4)推广到变截面杆的情形,对于这样的杆,惯性矩 I_1 和 I_2 是 z 的函数. 以前用来确定杆中任意给定截面上的力矩公式(20.3)仍然是正确的. 现在把它代入式(20.2),则得到方程

$$E\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(I_1\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}z^2}\right)=K_y,\quad E\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(I_2\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}z^2}\right)=K_x. \tag{20.12}$$

式中的 I_1 和 I_2,决不能提到导数符号前面去. 对于剪力,我们有

$$F_x=-E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(I_2\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}z^2}\right),\quad F_y=-E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(I_1\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}z^2}\right). \tag{20.13}$$

让我们回到方程(20.1),当时在等式右边第二项所作的忽略,看来在某些情形,甚至在小挠度弯曲时也可能是不合适的. 当沿着杆长作用很大的内力,即 F_z 很大时便是这种情况. 这样大的内力,通常是由于在杆端附加很强的拉力引起的. 用 $F_z=T$ 表示沿着杆作用的常拉力. 如果杆受到很大的压缩,而不是拉伸,则力 T 为负. 展开矢量积 $\boldsymbol{F}\times\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}l$,现在我们必须保留含有 T 的项,而带有 F_x 和 F_y 的项和从前一样可以忽略. 将矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}l$ 的分量分别代以 X'', Y'', 1,即得到平衡方程

$$\begin{aligned}&I_2EX''''-TX''-K_x=0,\\&I_1EY''''-TY''-K_y=0.\end{aligned} \tag{20.14}$$

对于剪力的表达式(20.5),现在应该增加含有 T(沿着矢量 $\boldsymbol{t}$ 方向作用的力)在 x 轴和 y 轴上的投影项:

$$F_x=-EI_2X'''+TX',\quad F_y=-EI_1Y'''+TY'. \tag{20.15}$$

自然,这些公式也能够直接从式(19.3)得到.

在某些情形下,甚至没有专门施加任何拉力,但由于自身弯曲,也可能出现非常大的力 T. 我们研究两端为固支或固定铰支的杆,这种杆的两端就不可能发生纵向位移. 这时,杆的弯曲不可避免地伴随有杆的伸长,并导致在杆内出现力 T. 当这个力成为主要的力时,我们不难估计挠度的大小. 弯曲杆的长度 $L+\Delta L$ 等于按两支点间连接的直线取积分:

$$L+\Delta L=\int_0^L\sqrt{1+X'^2+Y'^2}\,\mathrm{d}z.$$

在小挠度弯曲时,可以将根式展为级数,我们得到伸长 ΔL 的表达式:

$$\Delta L=\frac{1}{2}\int_0^L(X'^2+Y'^2)\,\mathrm{d}z.$$

在简单拉伸时,发生的拉应力等于相对伸长乘以杨氏模量和杆的截面面积 S. 于是,力 T 等于

$$T=\frac{ES}{2L}\int_0^L(X'^2+Y'^2)\,\mathrm{d}z. \tag{20.16}$$

如果 δ 是横向挠度的数量级,则导数 X' 和 Y' 的数量级为 δ/L,因而位于式(20.16)中的整个积分的数量级为 $(\delta/L)^2L=\delta^2/L$,而 $T\sim ES(\delta/L)^2$. 在式(20.14)中第一项和第二项的数量级分别为 $IE\delta/L^4$ 和 $T\delta/L^2\sim ES\delta^3/L^4$. 惯性矩 I 的数量级为 $I\sim h^4$,而 $S\sim h^2$,其中 h 为杆的厚度. 将这些代入式(20.14),不难得出,当 $\delta\sim h$ 时,式中的第一项和第二项具有可以相比较的数量级.

这样一来,在杆弯曲时,杆的两端固定,只要挠度比厚度小,形如式(20.4)的平衡方程就可以应用. 如果 δ 不比 h 小(但仍然是 $\delta\ll L$),则应该应用方程(20.14). 此时,在这些方程中,力 T 预先是不知道的. 在求解方程时,开始应把 T 视为已知参数,然后再根据所得到的解按式(20.16)确定 T,该式同时也确定了 T 与附加于杆的弯曲力的关系.

相反的极限情形是,当杆的抗弯能力远小于抗拉时,则在方程(20.14)中,将第一项与第二项比较时,前者可以忽略. 这种情形从物理上看,或者是由于存在很大的拉力 T,或者是由于 EI 足够的小(这可能是因为与之有关的厚度 h 小的结果). 通常把这样强力拉紧的杆称为**弦**. 在这种情形下,平衡方程为

$$TX''+K_x=0,\quad TY''+K_y=0. \tag{20.17}$$

弦的两端必须是固定的,就是说坐标(位移)是给定的,即

$$X=Y=0. \tag{20.18}$$

端点处的方向是不能随意给定的,而要由方程的解来确定.

最后我们指出,这种形式的小挠度弯曲杆的平衡方程也可以从变分原理得到,这须利用弹性能表达式(18.10):

$$F_{\rm rod}=\frac{E}{2}\int\{I_1Y''^2+I_2X''^2\}\,{\rm d}z.$$

在平衡时,该弹性能与势能(跟作用在杆上的外力 $\boldsymbol{K}$ 有关)之和必须取最小值,亦即

$$\delta F_{\rm rod}-\int(K_x\delta X+K_y\delta Y)\,{\rm d}z=0$$

(第二项是外力在杆的无限小位移上所做的功). 在对 $F_{\rm rod}$ 变分时,进行两次分部积分:

$$\frac{1}{2}\delta\int X''^2{\rm d}z=\int X''\delta X''{\rm d}z=X''\delta X'\,\Big|-\int X'''\delta X'{\rm d}z=$$

$$=X''\delta X'\,\Big|-X'''\delta X\,\Big|+\int X''''\delta X{\rm d}z,$$

对于 Y''^2 的积分,有类似的公式. 将它们代入原式,合并同类项后得到

$$\int[(EI_1Y''''-K_y)\delta Y+(EI_2X''''-K_x)\delta X]\,{\rm d}z+$$

$$+EI_1(Y''\delta Y'-Y'''\delta Y)\,\Big|+EI_2(X''\delta X'-X'''\delta X)\,\Big|=0.$$

在积分的第一项内，由于变分 δX 和 δY 的任意性，便得到平衡方程（20.4），而已经积分出来的其它项给出该方程的边界条件．如在自由端，变分 $\delta X, \delta Y, \delta X', \delta Y'$ 是任意的，相应的得到边界条件（20.11）．而同时在这一项里 δX 和 δY 的系数给出剪力分量的表达式（20.5），$\delta X'$ 和 $\delta Y'$ 的系数给出弯矩分量的表达式（20.3）．

最后，当存在拉力 T 时，仍可用同样的方法得到平衡方程（20.14），这只需在要进行变分的能量上增加下面的一项：

$$T\Delta L = \frac{T}{2}\int (X'^2 + Y'^2)\,\mathrm{d}z,$$

它是力 T 在杆伸长 ΔL 的路径上所作的功．

习　题

习题 1　试确定在自重影响下在杆端部具有各种不同固定方式时杆（长 l）的弯曲形状．

解：待求的形状可由方程

$$\zeta'''' = \frac{q}{EI}$$

（q 是单位长度杆的重量）的解和本书所讲述的杆端的各类边界条件确定，下面是在杆端的各种不同固定方式时得到的弯曲形状和最大位移（或称为最大挠度）．所有的坐标原点都选择在一个杆端．

（1）杆的两端固支：

$$\zeta = \frac{q}{24EI}z^2(z-l)^2, \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{384}\frac{ql^4}{EI}.$$

（2）杆的两端铰支：

$$\zeta = \frac{q}{24EI}z(z^3 - 2lz^2 + l^3), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}.$$

（3）一端（$z=l$）固支，另端（$z=0$）铰支：

$$\zeta = \frac{q}{48EI}z(2z^3 - 3lz^2 + l^3), \quad \zeta = (0.42l) = 0.005\,4\,\frac{ql^4}{EI}.$$

（4）一端（$z=0$）固支，另端（$z=l$）自由：

$$\zeta = \frac{q}{24EI}z^2(z^2 - 4lz + 6l^2), \quad \zeta(l) = \frac{1}{8}\frac{ql^4}{EI}.$$

习题 2　试确定在附加于杆正中间的集中力 f 的影响下杆的弯曲形状．

解：除了在 $z=l/2$ 的点以外，到处都有方程 $\zeta''''=0$．在杆端（$z=0$ 和 $z=l$）的边界条件取决于固定方式，在 $z=l/2$ 点，ζ, ζ', ζ'' 必须连续，而在该点两边的剪力 $F = -EI\zeta'''$ 之差必须等于力 f．

杆的形状（在 $0 \leqslant z \leqslant l/2$ 的部分杆上）和最大挠度给出下面的公式：

(1) 杆的两端固支：

$$\zeta=\frac{f}{48EI}z^2(3l-4z),\quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{fl^3}{192EI}.$$

(2) 杆的两端铰支：

$$\zeta=\frac{f}{48EI}z(3l^2-4z^2),\quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{fl^3}{48EI}.$$

由于杆的形状关于中点对称，因此在 $l/2\leqslant z\leqslant l$ 的杆段上，函数 $\zeta(z)$ 可以由此简单地用 $l-z$ 代换 z 得到.

习题 3　同习题 2，但是，杆的一端($z=0$)固支，而另端($z=l$)自由. 在杆的自由端上附加集中力 f.

解： 沿着整个杆 $F=\text{const}=f$，所以，$\zeta'''=-f/EI$. 由 $z=0$ 时，$\zeta=0$ 和 $\zeta'=0$，以及 $z=l$ 时 $\zeta''=0$ 的条件得到：

$$\zeta=\frac{f}{6EI}z^2(3l-z),\qquad \zeta(l)=\frac{fl^3}{3EI}.$$

习题 4　试确定两端固支杆在其正中间附加一个集中力偶时杆的弯曲形状.

解： 沿着整个杆长 $\zeta''''=0$，而弯矩 $M=EI\zeta''$；在 $z=l/2$ 点产生了突变，其大小等于附加集中力偶的力矩 m. 根据端部的相应条件得到：

(1) 杆的两端固支：

$$\zeta=\frac{m}{8EIl}z^2(l-2z),\qquad 当\quad 0\leqslant z\leqslant l/2,$$

$$\zeta=-\frac{m}{8EIl}(l-z)^2[l-2(l-z)],\qquad 当\quad l/2\leqslant z\leqslant l.$$

(2) 杆的两端铰支(即两端固定在球铰上)：

$$\zeta=\frac{m}{24EIl}z(l^2-4z^2),\qquad 当\quad 0\leqslant z\leqslant l/2,$$

$$\zeta=-\frac{m}{24EIl}(l-z)[l^2-4(l-z)^2],\qquad 当\quad l/2\leqslant z\leqslant l.$$

在 $z=l/2$ 点的两边，杆向着相反的方向弯曲.

习题 5　同习题 4，但是集中力偶附加在杆的自由端，杆的另一端固支.

解： 沿着整个杆长有 $M=EI\zeta''=m$，而在 $z=0$ 时：$\zeta=0$，$\zeta'=0$. 得到弯曲形状公式：

$$\zeta=\frac{m}{2EI}z^2.$$

习题 6　试确定两端固定简支杆，在杆的正中间附加拉力 T 和弯曲力 f 时，杆(圆截面)的形状.

解:在区间 $0\leqslant z\leqslant l/2$ 上,剪力等于 $f/2$,所以式(20.15)给出方程

$$\zeta'''-\frac{T}{EI}\zeta'=-\frac{f}{2EI}$$

边界条件:当 $z=0,l$ 时,$\zeta=0,\zeta'=0$,而当 $z=l/2$ 时,必须 $\zeta'=0$(因为 ζ' 是连续的). 对于杆的形状(在 $0\leqslant z\leqslant l/2$ 区间)得到如下公式:

$$\zeta=\frac{f}{2T}\left[z-\frac{\sinh kz}{k\cosh(kl/2)}\right],\qquad k=\left(\frac{T}{EI}\right)^{1/2}.$$

在小的 k 时,该表达式即转变为在习题 2 的(2)中已经得到的公式. 在大的 k 时,则变为

$$\zeta=\frac{f}{2T}z,$$

就是说,与方程(20.17)的结果是相符合的,即柔索在力 f 的影响下所取得的形状,是由两个相交于 $z=l/2$ 的直线段组成的.

如果力 T 是由横向力引起杆的拉伸产生的,则为了确定它必须利用公式(20.16). 将得到的表达式代入式(20.16),即求得方程

$$\frac{1}{k^6}\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\tanh^2\frac{kl}{2}-\frac{3}{kl}\tanh\frac{kl}{2}\right]=\frac{8E^2I^3}{f^2S},$$

这里,T 是作为 f 的隐函数确定的.

习题 7 位于弹性基础上的无限长杆(圆截面),即弯曲时在杆上作用着正比于挠度的力:$K=-\alpha\zeta$. 试确定在杆上面作用集中力 f 时,杆所取得的形状.

解:把坐标原点选在附加力 f 的点上,除了 $z=0$ 点外,下面的方程处处都成立:

$$EI\zeta''''=-\alpha\zeta.$$

求解方程必须满足的条件:当 $z=\pm\infty$ 时,$\zeta=0$,而在 $z=0$ 时,ζ',ζ'' 必须连续;剪力 $F=-EI\zeta'''$ 在 $z\to+0$ 和 $z\to-0$ 时的差值必须等于 f. 这样的解是

$$\zeta=\frac{f}{8\beta^3EI}e^{-\beta|z|}[\cos\beta|z|+\sin\beta|z|],\quad \beta=\left(\frac{\alpha}{4EI}\right)^{1/4}.$$

习题 8 设一细杆(圆截面),在自然状态下呈圆弧状,并在弯曲平面内附加径向力. 试推导细杆在小挠度弯曲时的平衡方程.

解:极坐标 r,φ 的原点选在圆弧的圆心. 杆的形变方程写成 $z=a+\zeta(\varphi)$ 的形式,其中 a 为圆弧半径,而 ζ 为弯曲时小的径向位移. 利用已知的用极坐标表示的曲率半径表达式,求得精确到 ζ 的一阶精度项的曲率:

$$\frac{1}{R}=\frac{r^2-rr''+2r'^2}{(r^2+r'^2)^{3/2}}\approx\frac{1}{a}-\frac{\zeta+\zeta''}{a^2}$$

(撇号′表示对 φ 的导数). 按式(18.11)求出弯曲弹性能:

$$F_{\rm rod} = \frac{EI}{2}\int_0^{\varphi_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a}\right)^2 a\mathrm{d}\varphi = \frac{EI}{2a^3}\int_0^{\varphi_0}(\zeta+\zeta'')^2\mathrm{d}\varphi$$

(φ_0是圆弧的中心角). 平衡方程由变分原理得到,变分方程

$$\delta F_{\rm rod} - \int_0^{\varphi_0}\delta\zeta K_r a\mathrm{d}\varphi = 0$$

(K_r是单位长度上的径向外力)具有的补充条件是

$$\int_0^{\varphi_0}\zeta\mathrm{d}\varphi = 0,$$

该式表示在所考虑的近似范围内,杆的总长度不变,也就是杆的总长度没有被拉长的条件. 应用拉格朗日方法,使下面的和式等于零:

$$\delta F_{\rm rod} - \int_0^{\varphi_0} aK_r\delta\zeta\mathrm{d}\varphi + a\alpha\int_0^{\varphi_0}\delta\zeta\mathrm{d}\varphi = 0,$$

式中 α 是常数. 对 $F_{\rm rod}$ 中积分号下面的表达式取变分,并对带有 $\delta\zeta''$的项进行两次分部积分,我们便得到

$$\left[\frac{EI}{a^3}(\zeta+2\zeta''+\zeta'''') - aK_r + \alpha a\right]\delta\zeta\mathrm{d}\varphi +$$

$$+\frac{EI}{a^3}(\zeta+\zeta'')\delta\zeta'\Big| - \frac{EI}{a^3}(\zeta'+\zeta''')\delta\zeta\Big| = 0.$$

由此得到平衡方程

$$\frac{EI}{a^4}(\zeta''''+2\zeta''+\zeta) - K_r + \alpha = 0, \tag{1}$$

剪力表达式

$$F = -\frac{EI}{a^3}(\zeta'+\zeta'''),$$

和弯矩表达式

$$M = \frac{EI}{a^2}(\zeta+\zeta'')$$

(比较 §20 的最后部分). 常数 α 由杆的总拉伸长度为零的条件确定.

习题 9 试确定圆环在一对集中力 f 沿着直径作用时的弯曲形变(图 18).

解:沿整个圆环的长度积分习题 8 的方程(1),得到

$$2\pi\alpha a = \int K_r a\mathrm{d}\varphi = 2f.$$

除了 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi$ 以外, 方程(1)处处都成立,即(此时,$K_r=0$)

$$\zeta''''+2\zeta''+\zeta+\frac{fa^3}{\pi EI}=0.$$

待求的环的形变关于直径 AB 和 CD 对称,因此在 A,B,C,D 点必须有 $\zeta'=0$;当 $\varphi\to\pm0$ 时,剪力值的差必须等于 f. 满足这些条件时,平衡方程的解为

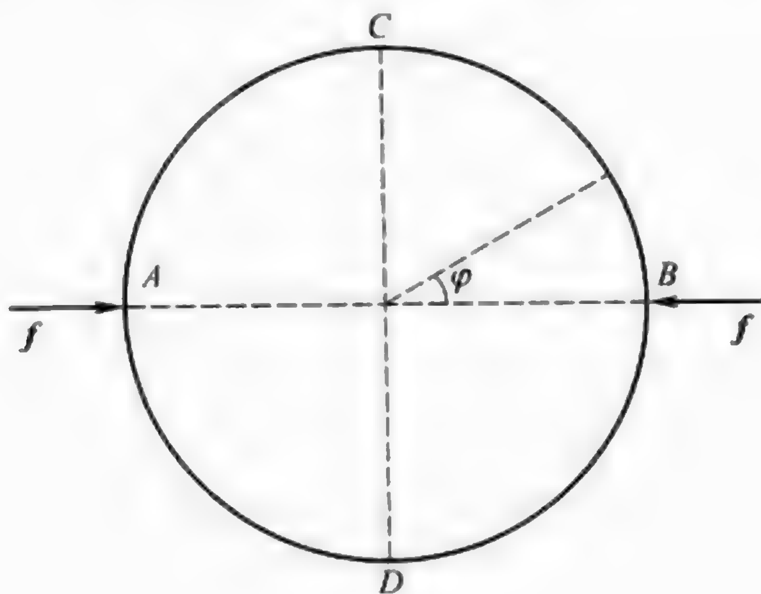


图 18

$$\zeta = \frac{fa^3}{EI}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\varphi\cos\varphi - \frac{\pi}{8}\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin\varphi\right), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

特别是，A 和 B 两点相互靠近了一个距离，其大小为

$$|\zeta(0) + \zeta(\pi)| = \frac{fa^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right).$$

§21 弹性系统的稳定性

杆件承受纵向压力作用所表现的行为，是重要的弹性不稳定现象最简单的例子，它是由欧拉(L. Euler)最先发现的.

在没有横向弯曲的外力 K_x，K_y 时，受压杆的平衡方程(20.14)有一个明显的解，就是 $X = Y = 0$，它对应于在纵向力 T 作用下，杆保持着直线形状. 但是这个解，只适用于杆受到的压力 $|T|$ 小于某个临界值 T_c 以前的稳定平衡. 当 $|T| < T_c$ 时，杆的直线形状对于任何小扰动都是稳定的. 换句话说，如果杆在任何小作用的影响下受到微小弯曲，则在这一作用停止后，杆将力图恢复到它原来的状态.

相反，当 $|T| > T_c$ 时，杆的直线形状对应于不稳定平衡. 这时，只需无限小的作用(弯曲)就足以破坏这一平衡，结果使杆件产生了大弯曲. 很明显，在这种条件下，受压杆件一般是不可能存在真实的不弯曲形式的.

杆件失去稳定以后的行为必须用大挠度弯曲方程来描述. 但是，在临界荷载值 T_c 时可以借助于小挠度弯曲方程得到. 当 $|T| = T_c$ 时，直线形状的杆处于某种随遇平衡. 这就是说，除了 $X = Y = 0$ 的解之外，还应该存在一个小的弯曲状态，同样是平衡的. 因此，临界值 T_c 就可以规定为 $|T|$ 的值. 这时方程

$$EI_2 X'''' + |T| X'' = 0, \qquad EI_1 Y'''' + |T| Y'' = 0 \tag{21.1}$$

出现了非零解. 这个解也直接确定了失稳后杆件的形变特性.

在本节的习题中,给出了各种弹性系统失稳的许多典型情况.

习　　题

习题 1　试确定两端为铰支时,杆的临界压力.

解: 因为对我们感兴趣的是在方程(21.1)的非零解中出现的最小值$|T|$,故只需研究这两个方程中含有I_1和I_2最小的那个方程就足够了. 设$I_2 < I_1$,方程

$$EI_2 X'''' + |T| X'' = 0$$

的解具有如下形式:

$$X = A + Bz + C\sin kz + D\cos kz, \quad k = \left(\frac{|T|}{EI_2}\right)^{1/2}.$$

在$z = 0$和$z = l$时,满足条件$X = 0, X'' = 0$的非零解是

$$X = C\sin kz,$$

而且应有$\sin kl = 0$. 由此得到待求的临界力:

$$T_c = \frac{\pi^2 EI_2}{l^2}.$$

杆失稳后所取得的形状表示在图 19(a)上.

习题 2　同习题 1,但是杆的两端是固支(见图 19(b)).

答案: $T_c = 4\pi^2 EI_2/l^2$.

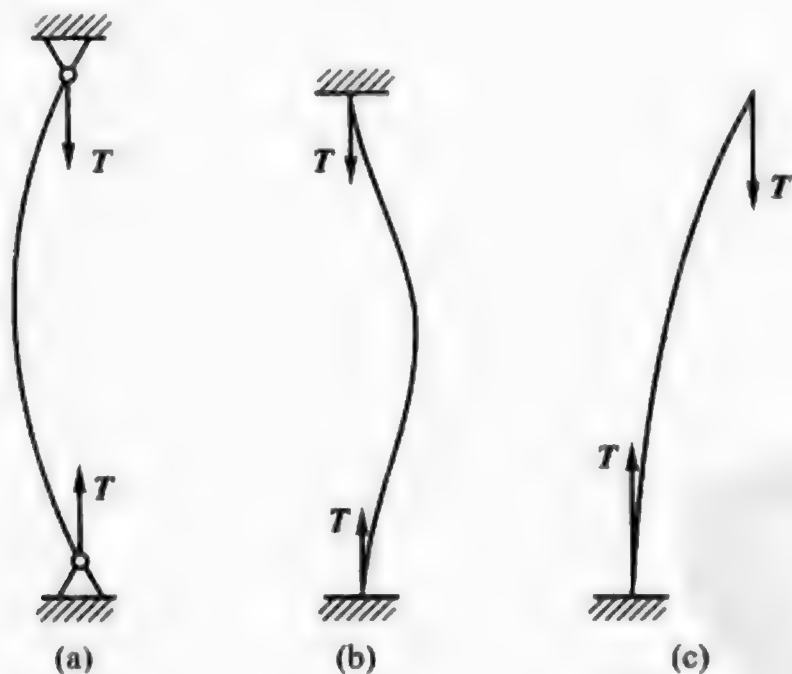


图 19

习题 3　同习题 1,但是杆的一端固支,另端自由(图 19(c)).

答案: $T_c = \pi^2 EI_2/4l^2$.

习题 4　试确定放置在弹性基础上的杆(圆截面),在两端为铰支时的临界

压力(参见§20的习题7).

解:在这里,现在必须用方程

$$EIX'''' + |T|X'' + \alpha X = 0$$

代替(21.1)来研究,类似于前面的分析得到它的解:

$$X = A\sin\frac{n\pi}{l}z, \quad T_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}\left(n^2 + \frac{\alpha l^4}{n^2\pi^4 EI}\right).$$

而且,式中的 n 必须取整数值,对于这些整数得到 T_c 的最小值. 当 α 值足够大时,得到 $n>1$,亦即杆失稳后变成为有若干个波形的杆.

习题5 圆截面杆受到扭转,杆的两端固支. 试确定扭转的临界值,超过该值后,杆的直线形状即变为不稳定.

解:扭转角的临界值由扭转杆的小挠度弯曲方程出现的非零解确定. 为了导出这些方程,将表达式(19.7),即

$$\boldsymbol{M} = EI\boldsymbol{t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l} + C\tau\boldsymbol{t}$$

(式中 τ 是单位扭转角)代入方程(19.3),则得到

$$EI\boldsymbol{t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l^2} + C\tau\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l} - \boldsymbol{F}\times\boldsymbol{t} = 0.$$

对该方程取导数,因为是小挠度弯曲,故在对第一项和第三项取导数时,可以认为 $\boldsymbol{t}$ 是常量,并等于沿着杆轴(z 轴)方向的矢量 $\boldsymbol{t}_0$; 同时,还记得 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}/\mathrm{d}l = 0$(因为沿着杆长没有外力),于是得到

$$EI\boldsymbol{t}_0\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l^3} + C\tau\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}l^2} = 0,$$

或者表为分量形式:

$$Y'''' - \kappa X''' = 0, \quad X'''' + \kappa Y''' = 0,$$

式中 $\kappa = C\tau/EI$. 引入 $\xi = X + \mathrm{i}Y$ 作为未知函数,则得到方程

$$\xi'''' - \mathrm{i}\kappa\xi''' = 0.$$

满足边界条件:当 $z = 0, l$ 时,$\xi = 0, \xi' = 0$,即得到具有如下形式的解:

$$\xi = a(1 + \mathrm{i}\kappa z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa z}) + bz^2,$$

并且得到了关于 a 和 b 的方程的协调条件关系式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa l} = \frac{2 + \mathrm{i}\kappa l}{2 - \mathrm{i}\kappa l}, \qquad \frac{\kappa l}{2} = \tan\frac{\kappa l}{2}.$$

该方程的最小根:$\kappa l/2 = 4.49$,于是

$$\tau_c = \frac{8.98EI}{Cl}.$$

习题6 同习题5,但是杆的两端为铰支.

解:此处,我们得到

$$\xi = a\left(1 - e^{i\kappa z} - \frac{\kappa^2}{2}z^2\right) + bz,$$

并且 κ 由 $e^{i\kappa l} = 1$，即 $\kappa l = 2\pi$ 确定．因此，待求的单位扭转角的临界值：

$$\tau_c = \frac{2\pi EI}{Cl}.$$

习题 7　试确定下端固支的垂直杆在自重作用下的稳定极限．

解：如果纵向压力 $F_z \equiv T$ 沿着杆的长度变化，则在式(20.1)中的第一项 $\frac{dF_z}{dl} \neq 0$，而代替式(20.14)的是

$$I_2 EX'''' - (TX')' - K_x = 0,$$
$$I_1 EY'''' - (TY')' - K_y = 0.$$

在当前的情形下，沿着整个杆长都没有横向弯曲力，而 $T = -q(l-z)$，其中 q 是单位长度杆的重量，z 是从下端点算起的坐标．假设 $I_2 < I_1$，考虑方程

$$I_2 EX''' = TX' = -q(l-z)X'$$

（当 $z = l$ 时，自然有 $X''' = 0$）．引用函数 $u = X'$ 后，上述方程的一般积分是

$$u = \eta^{1/3}[aJ_{-1/3}(\eta) + bJ_{1/3}(\eta)],$$

式中

$$\eta = \frac{2}{3}\left(\frac{q}{EI_2}(l-z)^3\right)^{1/2}.$$

边界条件：$X' = 0$（当 $z = 0$），$X'' = 0$（当 $z = l$）．由此给出函数 $u(\eta)$ 的条件：

$$u = 0, \qquad 当\ \eta = \eta_0 \equiv \frac{2}{3}\left(\frac{ql^3}{EI_2}\right)^{1/2},$$

$$u'\eta^{1/3} = 0, \qquad 当\ \eta = 0.$$

为了满足这些条件，应当置 $b = 0$，同时 $J_{-\frac{1}{3}}(\eta_0) = 0$．前述方程的最小根是 $\eta_0 = 1.87$，由此得到杆的临界长度

$$l_c = 1.98\left(\frac{EI_2}{q}\right)^{1/3}.$$

习题 8　设有一杆，具有长条形截面，致使 $I_2 \gg I_1$．杆的一端固支，在自由端附加力 f，在主平面 xz（抗弯刚度为 EI_2）内弯曲．试确定临界值 f_c，超过该值后，平面弯曲的形状将变为不稳定，并且杆在侧面（yz 平面）出现弯曲，同时受到扭转．

解：由于刚度 EI_2 的值远大于 EI_1（具有抗扭刚度 C①）．相对于侧向大挠度

① 比如，对于狭矩形截面，具有宽 h 和高 $b \gg h$ 时，则有

$$EI_1 = \frac{bh^3}{12}E, \quad EI_2 = \frac{b^3h}{12}E, \quad C = \frac{bh^3}{3}\mu.$$

弯曲出现不稳定性的同时，在 xz 平面内的弯曲仍然是小的. 为了确定不稳定的因素，应当建立杆的侧向小弯曲方程，其中保留在 xz 平面内的力 f 与小位移乘积成正比的项. 因为集中力只附加于杆的自由端，故沿着杆的整个长度有 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{f}$，而在自由端($z=l$)力矩 $\boldsymbol{M}=0$，根据公式(19.6)，得到关于固定坐标系 x,y,z 的力矩分量：

$$M_x=0,\quad M_y=(l-z)f,\quad M_z=(Y-Y_0)f,$$

式中 $Y_0=Y(l)$. 将这些分量投影到每一点都与杆联系在一起的坐标轴 ξ,η,ζ 上，在精确到一阶位移项时，我们得到

$$M_\xi=\varphi(l-z)f,\quad M_\eta=(l-z)f,$$

$$M_\zeta=(l-z)f\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}z}+f(Y-Y_0),$$

式中 φ 是扭转时杆截面的总旋转角(在这里，单位扭转角 $\tau=\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}z$ 沿着杆长不是常量). 另一方面，根据式(18.6)和(18.9)，在小弯曲时有

$$M_\xi=-EI_1Y'',\quad M_\eta=EI_2X'',\quad M_\zeta=C\varphi'.$$

比较上述两组表达式，即得到平衡方程

$$EI_2X''=(l-z)f,$$

$$EI_1Y''=-\varphi(l-z)f,\quad C\varphi'=(l-z)fY'+(Y-Y_0)f.$$

其中第一个方程确定了在 xz 平面内杆的基本弯曲. 现在需要求出 f 的值，在该值时，第二个和第三个方程出现非零解，从这两个方程中消去 Y，我们得到

$$\varphi''+k^2(l-z)^2\varphi=0,\quad k^2=\frac{f^2}{EI_1C}.$$

该方程的一般积分是

$$\varphi=a\sqrt{l-z}J_{1/4}\left(\frac{k}{2}(l-z)^2\right)+b\sqrt{l-z}J_{-1/4}\left(\frac{k}{2}(l-z)^2\right).$$

在固支端($z=0$)应有 $\varphi=0$，而在自由端，则扭转力矩 $C\varphi'=0$. 由第二个条件有 $a=0$，而由第一个条件给出 $J_{-1/4}(kl^2/2)=0$. 这个方程的最小根：$kl^2/2=2.006$，由此

$$f_c=\frac{4.01}{l^2}(EI_1C)^{1/2}.$$

第三章

弹 性 波

§22 各向同性介质中的弹性波

如果运动发生在形变物体内，则物体温度一般来说决不会是常量，它不仅随着时间变化，而且还随着物体从一点向另一点变化. 这就使得在任意运动的一般情况下，精确的运动方程更加复杂化.

但是，通常由于热量从物体的一部分向另一部分的传递（借助于自然的热传导）进行得非常缓慢，所以可使情况得以简化. 如果在与物体内部振动运动周期相同数量级的时间间隔内，实际上没有发生热交换，则可以把物体的任何一部分都看作是隔热的，亦即运动是绝热的. 而在绝热形变时，用 u_{ik} 表示 σ_{ik} 的公式，与按通常形式（等温的）公式的区别只是 E,σ 的值，在此处应该取其绝热时的值（见§6）. 下面我们将认为这些条件都是满足的，并且相应的 E 和 σ 的值，在这一章中均表示是绝热时的值.

为了得到弹性介质运动方程，应使物体内单位体积的应力之合力 $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ 等于加速度 $\ddot{u}_i$① 乘以物体单位体积的质量（即它的密度 ρ）：

$$\rho\ddot{u}_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{22.1}$$

上式就是运动方程的一般形式. 特别是，对各向同性弹性介质，运动方程可

---

① 这里所指的是质点速度 $\boldsymbol{v}$ 与其位移的导数 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 是相同的. 但是，我们必须强调指出，这绝不意味着是把这两个量混为一谈. 在晶体中，矢量 $\boldsymbol{u}$ 是晶格格点的位移，而速度 $\boldsymbol{v}$ 在连续介质力学中被定义为物质单位质量的动量. 严格说来，只是对于理想的晶体，即其中每一个晶格格点（而且只在晶格格点上）都有原子时，等式 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{u}}$ 才是正确的. 如果晶体含有缺陷（存在没有填充原子的格点——空位，或者相反，在格点之间有多余的原子），则相当于没有形变的晶格存在质量迁移（亦即动量不为零），即依靠缺陷使扩散原子"穿过晶格". 把 $\boldsymbol{v}$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 混为一谈，指的就是由于扩散缓慢或小的缺陷集中而忽略了这些效应.

以根据平衡方程(7.2)直接写出来. 于是我们有

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\nabla^2\boldsymbol{u}+\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}. \tag{22.2}$$

因为所有的形变都是小的,所以在弹性理论中研究的运动,属于小**弹性振动**或小**弹性波**. 我们首先研究无限各向同性介质中的平面弹性波,亦即,在这里形变 $\boldsymbol{u}$ 仅仅是某一坐标,比如说 x 和时间的函数. 这时,方程(22.2)中所有关于 y 和 z 的导数均消失了. 对于矢量 $\boldsymbol{u}$ 的其余分量我们得到如下的方程:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}-\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}-\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial u_y}{\partial t^2}=0 \tag{22.3}$$

(关于 u_z 的方程和 u_y 的方程一样). 式中引入了记号①:

$$c_l=\left[\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}\right]^{1/2},\quad c_t=\left[\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}\right]^{1/2}. \tag{22.4}$$

方程(22.3)就是通常的一维的**波动方程**,其中引入的量 c_l 和 c_t 是波的传播速度. 我们看到,波的传播速度是不同的,对于分量 u_x 是一种速度,而对于分量 u_y 和分量 u_z 是另一种速度.

这就是说,实质上弹性波是独立传播的两个波:其中一个波(u_x)的位移方向是沿着波传播的方向,这样的波称为**纵波**,它的传播速度是 c_l;而另一个波(u_y,u_z)的位移方向是在与波传播方向垂直的平面内,这样的波称为**横波**,它的传播速度是 c_t. 由式(22.4)显见,纵波的传播速度 c_l 总是大于横波的传播速度 c_t②:

$$c_l>(4/3)^{1/2}c_t. \tag{22.5}$$

速度 c_l 和 c_t 分别称为**纵向声速**和**横向声速**③.

我们知道,在形变时体积的改变是由应变张量对角线项之和确定的,亦即它的值 $u_{ii}\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{u}$. 在横波时,只有分量 u_y,u_z,而由于它们既与 y 无关,又与 z 无关,所以对于横波 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$,这就意味着,横波与物体各部分的体积改变无关. 相反,对于纵波 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}\neq0$,即纵波伴随有物体的压缩和拉伸.

将波分为以不同速度独立传播的两个部分,可以推广到无限空间任意(非平面的)弹性波的一般情形.

引入速度 c_l 和 c_t 后,重新写出方程(22.2):

$$\ddot{\boldsymbol{u}}=c_t^2\nabla^2\boldsymbol{u}+(c_l^2-c_t^2)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}. \tag{22.6}$$

---

① 我们同样给出用压缩模量,剪切模量和拉梅常量表示速度 c_l,c_t 的表达式:

$$c_l=\left(\frac{3K+4\mu}{3\rho}\right)^{1/2}=\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2},c_t=\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}.$$

② 事实上,由于 σ 只在从 0 到 1/2 的范围内变化(参见§5),因而存在更强的不等式:$c_l>c_t\sqrt{2}$.

③ 亦直接称为纵波波速和横波波速.

——译者注

将矢量 $\boldsymbol{u}$ 表示为两部分之和的形式：

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_l+\boldsymbol{u}_t. \tag{22.7}$$

其中的一个满足条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_t=0, \tag{22.8}$$

而另一个满足条件

$$\nabla\times\boldsymbol{u}_l=0. \tag{22.9}$$

由矢量分析可知，这样的表示总是可能的（因为一个矢量总可以表示为某个矢量的旋度与某个标量的梯度之和的形式）.

将 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_l+\boldsymbol{u}_t$ 代入式(22.6)后，我们得到

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_l+\ddot{\boldsymbol{u}}_t=c_t^2\nabla^2(\boldsymbol{u}_l+\boldsymbol{u}_t)+(c_l^2-c_t^2)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}_l. \tag{22.10}$$

将该方程的两边作用散度算子∇·，由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_t=0$，于是得到

$$\nabla\cdot\ddot{\boldsymbol{u}}_l=c_t^2\nabla^2\nabla\cdot\boldsymbol{u}_l+(c_l^2-c_t^2)\nabla^2\nabla\cdot\boldsymbol{u}_l,$$

或

$$\nabla\cdot(\ddot{\boldsymbol{u}}_l-c_l^2\nabla^2\boldsymbol{u}_l)=0.$$

另一方面，在上式中，位于圆括号里面的表达式的旋度也由于式(22.9)而等于零. 然而，如果一个矢量的旋度和散度在全空间中都等于零，则该矢量必恒等于零. 于是有

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_l}{\partial t^2}-c_l^2\nabla^2\boldsymbol{u}_l=0. \tag{22.11}$$

类似的，对方程(22.10)作用旋度算子，并注意到 $\nabla\times\boldsymbol{u}_l=0$，以及任何梯度的旋度都等于零，则得到

$$\nabla\times(\ddot{\boldsymbol{u}}_t-c_t^2\nabla^2\boldsymbol{u}_t)=0.$$

由于位于圆括号里面的表达式的散度也等于零，于是我们又得到形如式(22.11)一样的方程：

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_t}{\partial t^2}-c_t^2\nabla^2\boldsymbol{u}_t=0. \tag{22.12}$$

方程(22.11)和(22.12)就是通常的波动方程（三维）. 它们分别对应于波速为 c_l 或 c_t 弹性波的传播. 其中的一个波（$\boldsymbol{u}_t$）与体积的改变无关（由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_t=0$），而另一个（$\boldsymbol{u}_l$）则伴随有体积的压缩和膨胀.

在单色弹性波中，位移矢量具有如下形式：

$$\boldsymbol{u}=\mathrm{Re}\{\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\}, \tag{22.13}$$

式中 $\boldsymbol{u}_0$ 是坐标的函数. 将式(22.13)代入(22.6)，则得到关于函数 $\boldsymbol{u}_0$ 应满足的方程：

$$c_t^2\nabla^2\boldsymbol{u}_0+(c_l^2-c_t^2)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0+\omega^2\boldsymbol{u}_0=0. \tag{22.14}$$

单色波的纵向和横向部分分别满足方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{u}_l + k_l^2 \boldsymbol{u}_l = 0, \quad \nabla^2 \boldsymbol{u}_t + k_t^2 \boldsymbol{u}_t = 0, \tag{22.15}$$

式中 $k_l = \omega/c_l, k_t = \omega/c_t$ 是纵波和横波的**波矢量**[①].

最后,我们来研究平面单色波在两种不同介质分界面上的反射和折射. 这时,应当注意,一般来说,在反射和折射时,波的特性是要发生改变的. 假设在分界面上射入的是单纯的横波或单纯的纵波,而最后得到的却是既包含横波又包含纵波的混合波. 只有在入射波垂直于分界面的情形和任意角度入射的横波其振动与分界面平行的情形,波的特性才不会发生改变(由对称性考虑便可以得出这样的结论).

确定入射波和折射波方向的关系式,可以直接由频率的不变性和波矢量在分界面上的切向分量的不变性得到[②]. 设 θ 和 θ'分别为入射角和反射角(或折射角),而 c 和 c'为两种波的波速. 这时有

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{c}{c'}. \tag{22.16}$$

例如,入射波是横波,这时 $c = c_{t1}$ 是第一种介质中的横波波速,而对于反射波中的横波同样有 $c' = c_{t1}$,因此由式(22.16)给出

$$\theta = \theta'.$$

亦即,入射角等于反射角. 对于反射波中的纵波,有 $c' = c_{l1}$,因此

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{l1}}.$$

对于折射波中的横波有 $c' = c_{t2}$,当入射波也是横波时,有

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{t2}}.$$

类似的,对于折射波中的纵波,有

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{l2}}.$$

习　题

习题 1　试确定纵向单色波向具有真空的物体界面上按任意的入射角入射时的反射系数.

解: 在以任意角入射时,既出现纵波反射波,又出现横波反射波. 从对称观点考虑,很明显,在反射的横波中,位移矢量将完全位于入射面内(图 20,其中 $\boldsymbol{n}_0$,

---

① 俄文版为**波矢量**. 实际上,这里的 k_l, k_t 是相应波矢量 $\boldsymbol{k}_l, \boldsymbol{k}_t$ 的模,表示波数,即沿波矢量方向 2π 长度内所包含的简谐波的个数. ——译者注

② 参见第六卷, § 66. 在那里叙述的所有想法,在这里也完全适用.

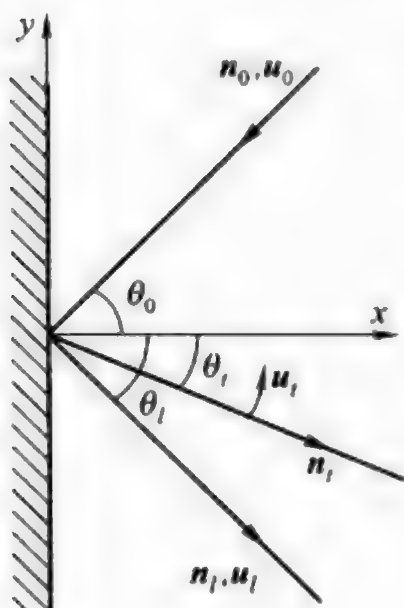


图 20

n_l, n_t 分别是沿入射方向，反射纵波方向和反射横波方向的单位矢量；u_0, u_l, u_t 分别是相应的位移矢量）. 物体中的总位移等于下面的和式（为简便起见，省略了公共因子 $e^{-i\omega t}$）：

$$u = A_0 n_0 e^{ik_0 \cdot r} + A_l n_l e^{ik_l \cdot r} + A_t a \times n_t e^{ik_t \cdot r}$$

（a 是垂直于入射面的单位矢量）. 波矢量的绝对值为：$k_0 = k_l = \omega/c_l$，$k_t = \omega/c_t$，而入射角 θ_0 和反射角 θ_l, θ_t 之间的关系：$\theta_l = \theta_0$，$\sin\theta_t = \sin\theta_0 \dfrac{c_t}{c_l}$. 我们得到在分界面上应变张量的分量：

$$u_{xx} = ik_0(A_0 + A_l)\cos^2\theta_0 + iA_t k_t \cos\theta_t \sin\theta_t,$$

$$u_{ll} = ik_0(A_0 + A_l),$$

$$u_{xy} = ik_0(A_0 - A_l)\sin\theta_0\cos\theta_0 + \frac{i}{2}A_t k_t(\cos^2\theta_t - \sin^2\theta_t)$$

（公共指数因子被省略了）. 应力张量的分量按照一般公式（5.11）计算，该公式现在可以方便的写为

$$\sigma_{ik} = 2\rho c_t^2 u_{ik} + \rho(c_l^2 - 2c_t^2)u_{ll}\delta_{ik}.$$

在介质自由表面上的边界条件：$\sigma_{ik}n_k = 0$，由此得 $\sigma_{xx} = \sigma_{yx} = 0$，并给出两个可通过 A_0 表示 A_l, A_t 的方程. 经过计算，最后得到

$$A_l = A_0 \frac{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t},$$

$$A_t = -A_0 \frac{2c_l c_t \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t}.$$

当 $\theta_0 = 0$ 时，$A_l = -A_0$，$A_t = 0$，亦即，入射波全部作为纵波被反射回来. 纵向反射波垂直于介质表面之分量的能流密度①与纵向入射波的能流密度之比为

$$R_l = \left|\frac{A_l}{A_0}\right|^2.$$

对于横向反射波，有类似的比：

$$R_t = \frac{c_t \cos\theta_t}{c_l \cos\theta_0}\left|\frac{A_t}{A_0}\right|^2.$$

自然，$R_l + R_t = 1$.

习题 2　同习题 1，但入射波为横波（其振动方向位于入射平面内）②.

---

① 能量随着波在介质中传播，在单位时间内通过介质中某一面积的能量称为通过该面积的能流，单位时间内通过垂直于波传播方向的单位面积的能流称为**能流密度**.　　——译者注

② 如果振动垂直于入射面，则波将以同样的形式反射回来，所以 $R_t = 1$.

解：反射波既有横波也有纵波，并且 $\theta_t=\theta_0$，$c_t\sin\theta_l=c_l\sin\theta_0$. 总位移矢量为

$$u=a\times n_0A_0e^{ik_0\cdot r}+n_lA_le^{ik_l\cdot r}+a\times n_tA_te^{ik_t\cdot r}.$$

关于反射波的振幅，得到如下表达式：

$$\frac{A_t}{A_0}=\frac{c_t^2\sin2\theta_l\sin2\theta_0-c_l^2\cos^22\theta_0}{c_t^2\sin2\theta_l\sin2\theta_0+c_l^2\cos^22\theta_0},$$

$$\frac{A_l}{A_0}=\frac{2c_lc_t\sin2\theta_0\cos2\theta_0}{c_t^2\sin2\theta_l\sin2\theta_0+c_l^2\cos^22\theta_0}.$$

习题 3 试确定半径为 R 的弹性球之径向振动的固有频率.

解：选择原点位于球心的球坐标. 径向振动时，u 的方向沿着半径，并且只与 r 和时间 t 有关. 因此 $\nabla\times u=0$. 引入位移"势" φ，使之符合于 $u_r=u=\partial\varphi/\partial r$. 把通过 φ 表示的运动方程归结为波动方程 $c_l^2\ \nabla^2\varphi=\ddot{\varphi}$，或按时间为周期（$\propto e^{-i\omega t}$）的振动方程：

$$\nabla^2\varphi\equiv\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=-k^2\varphi\quad,k=\frac{\omega}{c_l}. \tag{1}$$

在整个球的体积内（除球心外），该方程的有限解为

$$\varphi=A\frac{\sin kr}{r}.$$

（没有写出时间因子）. 径向应力：

$$\sigma_{rr}=\rho\{(c_l^2-2c_t^2)u_{ii}+2c_t^2u_{rr}\}=\rho\{(c_l^2-2c_t^2)\nabla^2\varphi+2c_t^2\varphi''\}$$

或利用方程(1)：

$$\frac{1}{\rho}\sigma_{rr}=-\omega^2\varphi-4c_t^2\frac{1}{r}\varphi'. \tag{2}$$

将边界条件 $\sigma_{rr}(R)=0$ 引入方程，则得

$$\frac{\tan kR}{kR}=\frac{1}{1-(kRc_l/2c_t)^2}. \tag{3}$$

上式的根即确定出固有振动频率 $\omega=c_lk$.

习题 4 试确定带有球腔的无限弹性介质径向振动的固有频率（设 $c_l\gg c_t$）.

解：在无限介质中，球腔的径向振动伴随有纵向声波射出，因而引起能量耗损和振动的衰减. 当 $c_l\gg c_t$（亦即 $K\gg\mu$）时，发射出的声波是小的，也可以说振动的固有频率具有小的阻尼系数.

方程(1)解的形式是发散的球面波：

$$\varphi=A\frac{e^{ikr}}{r},\quad k=\frac{\omega}{c_l},$$

借助于式(2)，由边界条件 $\sigma_{rr}(R)=0$，即得

$$\left(kR\frac{c_l}{c_t}\right)^2=4(1-\mathrm{i}kR).$$

由此(当 $c_l>>c_t$ 时)

$$\omega=\frac{2c_t}{R}\left(1-\mathrm{i}\frac{c_t}{c_l}\right).$$

ω 的实部给出振动的固有频率,而虚部给出阻尼系数. 自然,在不可压缩介质($c_l\to\infty$)中是不存在阻尼的. 这些振动是由于介质剪切($\mu\neq0$)阻力的特殊结果. 我们注意到,对于它们 $kR=2c_t/c_l<<1$,亦即相对于这些振动的波长远远大于 R(有意思的是,将该振动与弹性球的振动的结果相比较,当 $c_l>>c_t$ 时,第一固有频率可按式(3)由 $kR=\pi$ 给出).

§23 晶体中的弹性波

弹性波在各向异性介质中的传播,亦即在晶体中的传播,比在各向同性物体中的传播有更为复杂的规律. 为了研究这样的波,我们应返回到一般的运动方程

$$\rho\ddot{u}_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k},$$

以及利用关于 σ_{ik}的一般表达式(10.3),即

$$\sigma_{ik}=\lambda_{iklm}u_{lm}.$$

按照上节开头所说的,式中 λ_{iklm}所有的量,都是指绝热的弹性模量.

将 σ_{ik}代入运动方程,即得到

$$\rho\ddot{u}_i=\lambda_{iklm}\frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k}=\frac{\lambda_{iklm}}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m}+\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lambda_{iklm}\frac{\partial^2u_l}{\partial x_k\partial x_m}+\frac{1}{2}\lambda_{iklm}\frac{\partial^2u_m}{\partial x_k\partial x_l}.$$

由于张量 λ_{iklm}关于指标 l 和 m 是对称的,故交换第二项的求和指标 l 和 m 后,我们就发现第一项和第二项完全相同. 于是,我们就得到运动方程:

$$\rho\ddot{u}_i=\lambda_{iklm}\frac{\partial^2u_m}{\partial x_k\partial x_l}. \tag{23.1}$$

现在来研究晶体中的单色弹性波. 为此,我们应寻求运动方程形式为

$$u_i=u_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

(u_{0i}是常数)的解,而波矢量 $\boldsymbol{k}$ 与频率 ω 之间的关系,要由所写出的函数实际满足方程(23.1)来确定. 将 u_i 对时间取导数使本身扩大了 $-\mathrm{i}\omega$ 倍,而对 x_k 取导数使本身扩大了 $\mathrm{i}k_k$ 倍,因此将上式代入方程(23.1)后,即变为

$$\rho\omega^2u_i=\lambda_{iklm}k_kk_lu_m.$$

记 $u_i=\delta_{im}u_m$,将上面的等式改写为

$$(\rho\omega^2\delta_{im}-\lambda_{iklm}k_kk_l)u_m=0. \quad (23.2)$$

这是关于未知量 u_x,u_y,u_z 的三个一次齐次方程组. 众所周知,这组方程只有当其系数行列式等于零时有非零解,即方程

$$|\lambda_{iklm}k_kk_l-\rho\omega^2\delta_{im}|=0. \quad (23.3)$$

这些方程确定了频率与波矢量的关系,这种关系通常称为波的**色散关系**,确定它的方程称为**色散方程**. 方程(23.3)是关于 ω^2 的三次方程,一般来说,它有三个不同的根 $\omega^2=\omega_j^2(\boldsymbol{k})$,就是色散关系的三个分支. 将其中的每一个根依次代回到方程(23.2)并求解,即得到这些波的位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 的方向,就是通常说的**偏振方向**(自然,由于方程自身的齐次性,矢量 $\boldsymbol{u}$ 的绝对值不能由方程(23.2)确定,仍然是任意的)①. 具有同一个波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的三个波的偏振方向相互垂直. 这一重要结果,也可以由把方程(23.3)看作是确定二阶对称张量 $\lambda_{iklm}k_kk_l$② 的主值方程而直接得到,因而方程(23.2)也就确定了这一张量的主方向. 众所周知,主方向是相互垂直的. 但是,一般来说,这些方向之中的任何一个,对于 $\boldsymbol{k}$ 的方向而言,即不是纯纵向的,也不是纯横向的.

波的传播速度(它的**群速度**)由下面的导数给出:

$$\boldsymbol{U}=\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}} \quad (23.4)$$

(参见第六卷,§67). 在各向同性介质中,$\omega(\boldsymbol{k})$ 与绝对值 k 成正比关系,因此,该速度的方向与波矢量的方向一致. 而在晶体中并非如此,一般来说,波的传播方向与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向并不一致,只有对某些特殊方向(晶体的对称轴方向)矢量 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 才是共线的.

由色散方程(23.3)可见,在晶体中,ω 是矢量 $\boldsymbol{k}$ 的分量的一次齐次函数(如果引入比值 ω/k 作为未知量,则方程的系数与 k 无关). 因此,速度 $\boldsymbol{U}$ 是 k_x,k_y,k_z 的零次齐次函数. 换句话说,波的传播速度是它的方向的函数,与频率无关.

如果我们在 $\boldsymbol{k}$ - 空间(亦即在 k_x,k_y,k_z 坐标中)构造一个频率的等值面 $\omega(\boldsymbol{k})=\text{const}$(对于色散关系中的任何一个分支),则矢量(23.4)的方向与等值面的法线方向相同. 很明显,如果等值面处处都是凸面,则 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的方向之间的关系是单值的:每一个 $\boldsymbol{k}$ 的方向对应一个确定的 $\boldsymbol{U}$ 方向,反之亦然. 如果频率的等值面非处处是凸面,则这个关系变为非单值的关系:每一个 $\boldsymbol{k}$ 的方向,像前面说的那样,对应(在给定色散关系的分支上)一个 $\boldsymbol{U}$ 的方向,但是,给定 $\boldsymbol{U}$ 的方

---

① 在各向同性物体中,这些分支是 $\omega=c_lk$(纵向偏振波)和两个重根 $\omega=c_tk$,对应于两个独立的横向偏振波.

② 由于张量 λ_{iklm} 的对称性质,有

$$\lambda_{iklm}k_kk_l=\lambda_{kiml}k_kk_l=\lambda_{mlki}k_kk_l.$$

最后一个表达式与第一个的区别只是傀标符号 k,l,亦即张量 $\lambda_{iklm}k_kk_l$ 实际上关于指标 i,m 是对称的.

向，可能存在不同的 $\boldsymbol{k}$ 方向.

习 题

习题 1 试确定在立方晶体中弹性波的色散关系：(1) 波在立方晶体结晶面(001)①即立方体界面上传播；(2) 波在结晶方向[111]即立方体对角线方向上传播.

解：立方晶体不为零的弹性模量有 $\lambda_{xxxx}\equiv\lambda_1,\lambda_{xxyy}\equiv\lambda_2,\lambda_{xyxy}\equiv\lambda_3$(和与它们相等的由 x,y,z 中其它指标对来置换指标 x,y 得到的分量，参见 §10). 坐标轴 x,y,z 沿着立方体的棱边.

(1) 选取(001)面作为 xy 平面，并设 θ 为该平面的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 和 x 轴的夹角，构建并求解色散方程(23.3)，即得到色散关系的三个分支：

$$\rho\omega_{1,2}^2=\frac{1}{2}k^2\{\lambda_1+\lambda_3\pm[(\lambda_1-\lambda_3)^2-4(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)\sin^2\theta\cos^2\theta]^{1/2}\},$$

$$\rho\omega_3^2=\lambda_3k^2.$$

第三个分支的波是沿着 z 轴的横向偏振波. 前面两个分支的波是在 xy 平面内的偏振波. 从对称性考虑，很明显，所有这些波的传播速度 $\boldsymbol{U}=\partial\omega/\partial\boldsymbol{k}$ 也在 xy 平面内，因此由得到的表达式计算它是足够的.

当 $\theta=0$($\boldsymbol{k}$ 沿 x 轴)时，有

$$\rho\omega_1^2=\lambda_1k^2,\quad \rho\omega_2^2=\lambda_3k^2,$$

并且 1 波是纵波(沿着 x 轴偏振)，而 2 波是横波(沿着 y 轴偏振).

当 $\theta=\pi/4$($\boldsymbol{k}$ 沿立方体界面的对角线)时，有

$$\rho\omega_1^2=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)k^2,\quad \rho\omega_2^2=\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)k^2.$$

其中 1 波是纵波，而 2 波是横波，并在 xy 平面内偏振.

(2) 在这种情形下，波矢量的分量 $k_x=k_y=k_z=\dfrac{k}{\sqrt{3}}$. 色散方程的解是

$$\rho\omega_1^2=\frac{1}{3}k^2(\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3),$$

$$\rho\omega_{2,3}^2=\frac{1}{3}k^2(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3).$$

其中 1 波是纵波，2 波和 3 波是横波.

---

① 在结晶学中记号(hkm)称为晶面指标(或密勒指数)，用它来表示一组平行晶面的取向，h,k,l 是三个互质整数，所以(001)表示一个晶面；而[uvw]称为晶棱指标，用它来表示一组平行直线的方向，u,v,w 亦是三个互质整数，所以[111]表示一条直线，这里是立方晶体的一条对角线. 详细请参阅有关教程.

——译者注

习题 2 试确定六方晶系晶体弹性波的色散关系.

解:六方晶系有五个独立的弹性模量(参见§10 的习题 1),对它们引入记号:

$$\lambda_{xxxx}=\lambda_{yyyy}=a,\quad \lambda_{xyxy}=b,\quad \lambda_{xxyy}=a-2b,$$
$$\lambda_{xxzz}=\lambda_{yyzz}=c,\quad \lambda_{xzxz}=\lambda_{yzyz}=d,\quad \lambda_{zzzz}=f.$$

令 z 轴的方向沿着六次对称轴,而 x,y 轴的方向可以任意选择. 我们这样选取 xz 平面,使波矢量 $\boldsymbol{k}$ 在它的上面. 这时 $k_x=k\sin\theta, k_y=0, k_z=k\cos\theta$,其中 θ 是 $\boldsymbol{k}$ 与 z 轴的夹角. 组建并求解方程(23.3),得到

$$\rho\omega_1^2=k^2(b\sin^2\theta+d\cos^2\theta),$$

$$\rho\omega_{2,3}^2=\frac{1}{2}k^2\{a\sin^2\theta+f\cos^2\theta+d\pm$$
$$\pm[((a-d)\sin^2\theta+(d-f)\cos^2\theta)^2+4(c+d)^2\sin^2\theta\cos^2\theta]^{1/2}\}.$$

当 $\theta=0$ 时,有

$$\rho\omega_{1,2}^2=k^2d,\quad \rho\omega_3^2=k^2f.$$

其中 3 波是纵波,1 波和 2 波是横波.

§24 表面波

弹性波的特殊形式是在介质表面附近传播而不穿入介质深处的波,就是瑞利波(J. W. Rayleigh,1885).

写出形如式(22.11),(22.12)的运动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\nabla^2 u=0 \tag{24.1}$$

(式中 u 是矢量 $\boldsymbol{u}_l,\boldsymbol{u}_t$ 中的任意一个分量,而 c 是相应的速度 c_l 或 c_t),并寻求其适合于表面波的解. 假设弹性介质的表面是平面,就把它选作 xy 面,并设介质对应于 $z<0$ 的区域.

我们来研究沿着 x 轴传播的"平面"单色表面波,其中函数 $u(t,x,z)$ 具有如下形式:

$$u=e^{i(kx-\omega t)}f(z),$$

式中函数 $f(z)$ 满足方程 $f''=\kappa^2 f$,引入记号

$$\kappa=\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)^{1/2}. \tag{24.2}$$

如果 $k^2-\omega^2/c^2<0$,则 $f(z)$ 是周期函数,亦即我们得到的是通常在介质整个体积内不消失的平面波. 因此,应该认定 $k^2-\omega^2/c^2>0$,而且 κ 为实数. 这时,方程具有 $\exp(\pm\kappa z)$ 形式的解,应从中选取 $z\to-\infty$ 时的衰减函数.

这样一来,我们就得到运动方程的解:

$$u = \text{const} \cdot \ e^{i(kx-\omega t)} e^{\kappa z}. \tag{24.3}$$

它对应于在介质内部迅速(按指数)衰减的波,即波只在介质表面附近传播,κ 值决定波的衰减速度.

波中真实的位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 为矢量 $\boldsymbol{u}_l$ 与 $\boldsymbol{u}_t$ 之和,其中的每一个分量都满足方程(24.1),$\boldsymbol{u}_l$ 的速度为 $c=c_l$,$\boldsymbol{u}_t$ 的速度为 $c=c_t$. 在无限介质中的体积波情形下,这两部分是两个相互独立传播的波. 而在表面波的情形下,再像这样的把它分为两个相互独立的部分是不可能的(由于存在边界条件). 位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 必须是矢量 $\boldsymbol{u}_l$ 和 $\boldsymbol{u}_t$ 之确定的线性组合. 关于后面的两个矢量,我们必须指出,现在它们没有明显的平行和垂直于位移分量传播方向的意义了.

为了确定矢量 $\boldsymbol{u}_l$ 和 $\boldsymbol{u}_t$ 的线性组合以给出真实的位移 $\boldsymbol{u}$,必须转向确定物体的边界条件. 由此确定波矢量 $\boldsymbol{k}$ 和频率 ω 之间的关系,因此也确定了波的传播速度. 在自由表面上必须满足 $\sigma_{ik}n_k=0$ 的条件. 因为法矢量 $\boldsymbol{n}$ 平行于 z 轴,故由此得出以下条件:

$$\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=\sigma_{zz}=0,$$

所以

$$u_{xz}=0,\quad u_{yz}=0,\quad \sigma(u_{xx}+u_{yy})+(1-\sigma)u_{zz}=0. \tag{24.4}$$

因为所有的量都与坐标 y 无关,故由第二个条件给出

$$u_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\ \frac{\partial u_y}{\partial z}=0.$$

由此并考虑到式(24.3),得到

$$u_y=0. \tag{24.5}$$

因此,表面波中的位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 位于通过传播方向并垂直于表面的平面上.

波的"横向"部分 $\boldsymbol{u}_t$ 应满足条件(22.8),即 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_t=0$ 或

$$\frac{\partial u_{tx}}{\partial x}+\frac{\partial u_{tz}}{\partial z}=0.$$

根据式(24.3),由这一条件得到等式

$$iku_{tx}+\kappa_t u_{tz}=0,$$

依此确定比值 u_{tx}/u_{tz}. 于是有

$$u_{tx}=\kappa_t a e^{ikx+\kappa_t z-i\omega t},\quad u_{tz}=-ika e^{ikx+\kappa_t z-i\omega t}. \tag{24.6}$$

式中 a 是常数.

波的"纵向"部分 $\boldsymbol{u}_l$ 满足条件(22.9),即 $\nabla\times\boldsymbol{u}_l=0$ 或

$$\frac{\partial u_{lx}}{\partial z}-\frac{\partial u_{lz}}{\partial x}=0,$$

由此

$$iku_{lz}-\kappa_l u_{lx}=0,\quad \kappa_l=\left(k^2-\frac{\omega^2}{c_l^2}\right)^{1/2}.$$

这样一来,就有

$$u_{lx} = kbe^{ikx+\kappa_l z-i\omega t}, \quad u_{lz} = -i\kappa_l be^{ikx+\kappa_l z-i\omega t}, \tag{24.7}$$

式中 b 是常数.

现在利用条件(24.4)中的第一和第三式,将 u_{ik}通过 u_i 的导数表示,并引入速度 c_l和 c_t,这些条件即可改写为

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0,$$

$$c_l^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + (c_l^2 - 2c_t^2)\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0. \tag{24.8}$$

在上式中代入下式:

$$u_x = u_{lx} + u_{tx}, \quad u_z = u_{lz} + u_{tz}.$$

最后,由式(24.8)中的第一个条件给出方程:

$$a(k^2 + \kappa_t^2) + 2bk\kappa_l = 0, \tag{24.9}$$

由第二个条件导出等式:

$$2ac_t^2\kappa_t k + b[c_l^2(\kappa_l^2 - k^2) + 2c_t^2 k^2] = 0,$$

或

$$2a\kappa_t k + b(k^2 + \kappa_t^2) = 0. \tag{24.10}$$

由两个齐次方程(24.9)和(24.10)的相容性条件给出

$$(k^2 + \kappa_t^2)^2 = 4k^2\kappa_t\kappa_l,$$

或两边平方并代入 κ_t 和 κ_l 的值,得

$$\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^4 = 16k^4\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}\right). \tag{24.11}$$

上面的方程确定了 ω 和 k 的关系. 显然 $\omega = \text{const} \cdot k$. 为了确定比例系数,将这一关系写为

$$\omega = c_t k\xi. \tag{24.12}$$

这时,展开括号并约去公共因子 k^8,我们就得到了关于 ξ 的方程:

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2\left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0. \tag{24.13}$$

由此显见,ξ 的数值只与比值 c_t/c_l 有关,而这一比值乃是每一个给定物质的某些固有特性,并且它本身也只与泊松比有关:

$$\frac{c_t^2}{c_l^2} = \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}.$$

自然,ξ 必须是正实数,并且 $\xi < 1$(以使 k_t、k_l 为实数). 满足这些条件时,方程

(24.13)只有一个根. 所以,对于每一个给定的 c_t/c_l 值,总共就得到一个确定的 ξ 值①.

这样一来,对于表面波,也像体积波一样,频率正比于波矢量. 它们之间的比例系数是波的传播速度:

$$U = c_t\xi. \tag{24.14}$$

依此,表面波的传播速度就可以通过体积波的横波和纵波的速度 c_t 和 c_l 来确定. 横波和纵波的振幅之比值由 ξ 值按下面的公式给出:

$$\frac{a}{b} = -\frac{2-\xi^2}{2\sqrt{1-\xi^2}}. \tag{24.15}$$

对于不同的物质,比值 c_t/c_l 的实际大小在 $1/\sqrt{2}$ 到 0 的范围之间变化,相应的 σ 在 0 到 1/2 内变化. 这时 ξ 的变化范围是从 0.874 到 0.955. 在图 21 上给出了 ξ 与 σ 的关系图.

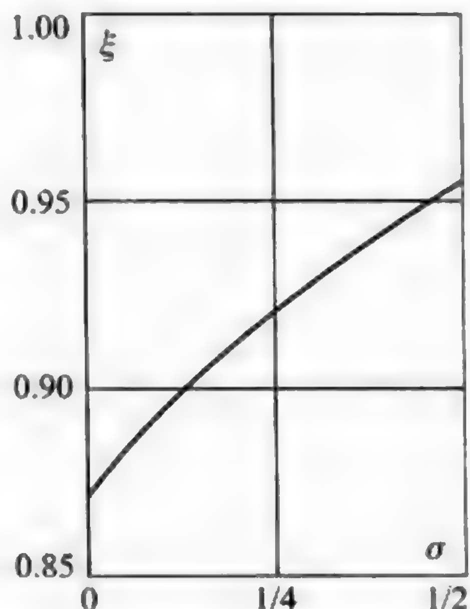


图 21

习　　题

习题　有一厚度为 h(介质1)的平面平行层位于弹性半空间(介质2)上面. 试确定平行层内振动方向与层边界平行的横波之频率和波矢量之间的关系.

解:选取平行层与半空间的分界面作为 xy 平面,并且,弹性半空间对应于 $z<0$,而平行层中,$h \geqslant z \geqslant 0$. 在层内,有

$$u_{x1} = u_{z1} = 0, \quad u_{y1} = f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},$$

而在介质 2 中,我们把在深度上衰减的波写为:

$$u_{x2} = u_{z2} = 0, \quad u_{y2} = A\mathrm{e}^{\kappa_2 z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \quad \kappa_2 = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_{t2}^2}\right)^{1/2}.$$

对于函数 $f(z)$ 有如下方程:

$$f'' + \kappa_1^2 f = 0, \quad \kappa_1 = \left(\frac{\omega^2}{c_{t1}^2} - k^2\right)^{1/2}$$

(下面我们会看到,应使 $\kappa_1^2 > 0$),由此有

$$f(z) = B\sin\kappa_1 z + C\cos\kappa_1 z.$$

在平行层的自由边界($z=h$)上,必须有 $\sigma_{zy}=0$,即 $\partial u_{y1}/\partial z = 0$. 而在两个介质之间

---

① 当从方程(24.11)化为(24.13)时,丢失了 $\omega^2=0$ 的根($\kappa_t=\kappa_l=k$),这与值 $\xi=0$ 相适应,同时满足条件 $\xi<1$. 但是,由方程(24.9)和(24.10)显见,这些根与等式 $a=-b$ 相符合,因此全位移 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_l+\boldsymbol{u}_t=0$,即根本就没有运动.

的界面上($z=0$)有下面的条件:

$$u_{y1}=u_{y2},\quad \mu_1\frac{\partial u_{y1}}{\partial z}=\mu_2\frac{\partial u_{y2}}{\partial z}$$

(μ_1,μ_2 是两种介质的剪切模量). 由这些条件得到关于 A,B,C 的三个方程,由这些方程的相容性条件给出

$$\tan\kappa_1 h=\frac{\mu_2\kappa_2}{\mu_1\kappa_1}.$$

该方程以隐式形式确定了 ω 与 k 的关系,它只有在 κ_1 和 κ_2 为实数时有解,因而总有 $c_{t2}>\omega/k>c_{t1}$. 由此可见,该波的传播,只有在 $c_{t2}>c_{t1}$ 的条件下才有可能.

§25 杆和板的振动

在薄板和杆中传播的波与在各向无限介质中传播的波,有着本质的区别. 这时我们所说的波,其波长远远大于杆或板的厚度. 相反的极限情形是波长远小于杆或板的厚度,这时一般可以把杆或板看作是各向无限的,并且我们又重新得到在无限介质中存在的关系.

必须区别发生在平行于杆轴或板平面方向振动的波与垂直振动的波. 我们首先从研究杆中的纵波开始.

若在杆的侧表面上没有任何外力作用,则杆的纵向形变(截面沿杆长是均匀的)是简单拉伸或压缩. 这样一来,在杆中的纵波是沿杆长传播的简单拉伸或压缩. 但是,在简单拉伸时,应力张量中只有分量 σ_{zz}不为零(z 轴沿着杆长),它与应变张量的关系(参见§5)为

$$\sigma_{zz}=Eu_{zz}=E\frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

将该式代入一般运动方程

$$\rho\ddot{u}_z=\frac{\partial\sigma_{zk}}{\partial x_k},$$

得到

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}-\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}=0.\tag{25.1}$$

这就是杆中的纵向振动方程,我们看到,它具有通常波动方程的形式. 纵波在杆中传播的速度等于

$$\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}.\tag{25.2}$$

将该式与 c_l 的表达式(22.4)比较,我们发现,它小于在无限介质中纵波的传播速度.

我们现在转到薄板中的纵波. 对于这种振动的运动方程可以立刻写出来,这

只需在平衡方程(13.4)中，以 $-\rho h\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$ 和 $-\rho h\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$ 代替 P_x 和 P_y 即可，于是有

$$\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=\frac{1}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}=\frac{1}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}. \tag{25.3}$$

现在来研究沿着 x 轴传播的平面波，即在这种波中形变只与 x 坐标有关，而与 y 坐标无关. 这时方程(25.3)得到了极大的简化，并具有如下形式：

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}-\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}-\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}=0. \tag{25.4}$$

这样一来，我们又一次得到了普通的波动方程. 式中的系数，对于 u_x 和 u_y 是不同的. 振动时平行于传播方向的波(u_x)，其传播速度等于

$$\left(\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}\right)^{1/2}. \tag{25.5}$$

而振动时垂直于传播方向(但仍处于板平面内)的波(u_y)，其波速等于无限介质中的横波波速 c_t.

由此可见，杆和板中的纵波与无限介质中的波，具有同样的特性，区别只是速度(依旧与频率无关)不同. 对于杆和板中的**弯曲波**，得到的完全是另外一种关系，在这种情形时，振动发生在垂直于杆轴或板平面的方向上，即伴随杆或板的弯曲.

板的自由振动方程可以在平衡方程(12.5)的基础上直接写出来. 为此，必须用加速度 $\ddot{\zeta}$ 与板在单位面积上的质量 ρh 之乘积代替式中的 $-P$. 这样一来，我们便得到

$$\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+\frac{D}{h}\nabla^2\ \nabla^2\zeta=0 \tag{25.6}$$

(式中 ∇^2 是二维拉普拉斯算子).

现在来研究单色弹性波，并相应地寻求方程(25.6)的解，其形式为

$$\zeta=\mathrm{const}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{25.7}$$

(自然，波矢量 $\boldsymbol{k}$ 总是有两个分量：k_x 和 k_y). 将其代入式(25.6)，则得到方程

$$-\rho\omega^2+\frac{D}{h}k^4=0.$$

由此得到频率与波矢量之间的如下关系：

$$\omega=k^2\left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/2}=k^2\left(\frac{h^2E}{12\rho(1-\sigma^2)}\right)^{1/2}. \tag{25.8}$$

由此可见，频率与波矢量绝对值的平方成正比. 而在无限介质中的波，频率与波矢量绝对值的一次方成正比.

知道波的色散关系后，就可以根据公式(23.4)求出波的传播速度，在现在的情形下，我们得到

$$U=\left[\frac{h^2E}{3\rho(1-\sigma^2)}\right]^{1/2}k. \tag{25.9}$$

由此可见，弯曲波沿板的传播速度与波矢量(波数)成正比，而不像在三维无限介质中的波那样是常量[①].

对于细杆的弯曲波也会得到类似的结果. 假设弯曲振动是小的. 在小挠度弯曲杆的平衡方程(20.4)中，将力 $-K_x$, $-K_y$ 代以加速度 $\ddot{X}$, $\ddot{Y}$ 与单位长度杆的质量 ρS(S 为杆的截面面积)之乘积，便得到运动方程. 由此，有

$$\rho S\ddot{X}=EI_y\frac{\partial^4X}{\partial z^4},\quad \rho S\ddot{Y}=EI_x\frac{\partial^4Y}{\partial z^4}. \tag{25.10}$$

我们重新寻求这组方程如下形式的解：

$$X=\text{const}\cdot e^{i(kz-\omega t)},\quad Y=\text{const}\cdot e^{i(kz-\omega t)},$$

并得到沿 x 轴和 y 轴振动的色散关系如下：

$$\omega^{(x)}=\left(\frac{EI_y}{\rho S}\right)^{1/2}k^2,\quad \omega^{(y)}=\left(\frac{EI_x}{\rho S}\right)^{1/2}k^2. \tag{25.11}$$

相应的传播速度：

$$U^{(x)}=2\left(\frac{EI_y}{\rho S}\right)^{1/2}k,\quad U^{(y)}=2\left(\frac{EI_x}{\rho S}\right)^{1/2}k. \tag{25.12}$$

最后，我们来研究杆的**扭转振动**. 当杆受到扭转形变时，杆的运动方程可由表达式 $C\partial\tau/\partial z$(参见§16，§18)等于单位长度杆的动量矩对时间的导数得到. 该动量矩等于 $\rho I\partial\varphi/\partial t$，其中 $\partial\varphi/\partial t$ 是旋转角速度(φ 是给定截面的旋转角)，而

$$I=\int(x^2+y^2)\,\mathrm{d}f$$

为杆截面关于惯性中心的惯性矩(在纯扭转振动时，每个截面都将绕杆中保持静止的惯性轴作旋转振动). 写出 $\tau=\partial\varphi/\partial z$，即可得到如下形式的运动方程：

$$C\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\rho I\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{25.13}$$

由此可见，扭转振动沿杆的传播速度等于

$$\left(\frac{C}{\rho I}\right)^{1/2}. \tag{25.14}$$

习　　题

习题1　试确定杆(长度为 l)的纵向固有振动频率，杆的一端固支(夹紧固

---

① 波矢量(波数)$k=2\pi/\lambda$，其中 λ 是波长. 因此，根据式(25.9)，当 $\lambda\to0$ 时，速度 U 就应无限地增加. 实际上这个结果是毫无实际意义的，因为公式(25.9)不适用于波长过短的情形.

定)，另一端自由.

解：在固定端($z=0$)应有 $u_z=0$，而在自由端($z=l$)有 $\sigma_{zz}=Eu_{zz}=0$，即 $\partial u_z/\partial z=0$. 我们寻求方程(25.1)的形式为下式的解：

$$u_z=A\cos(\omega t+\alpha)\sin kz,\quad k=\omega\left(\frac{\rho}{E}\right)^{1/2}.$$

由 $z=l$ 时 $\cos kl=0$ 的条件得到固有频率

$$\omega=\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}\frac{(2n+1)\pi}{2l}$$

(n 为整数).

习题 2 同习题 1，但是杆的两端都自由，或两端都固定.

答案：在这两种情形下均有

$$\omega=\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}\frac{n\pi}{l}.$$

习题 3 试确定弦(长度为 l)的固有频率.

解：弦的运动方程：

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}-\frac{\rho S}{T}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=0$$

(参见平衡方程(20.17)). 边界条件：当 $z=0,l$ 时，$X=0$. 由此得到固有频率：

$$\omega=\left(\frac{\rho S}{T}\right)^{1/2}\frac{n\pi}{l}.$$

习题 4 试确定两端固支(夹紧固定)杆(长度为 l)的横向振动固有频率.

解：将式

$$X=X_0(z)\cos(\omega t+\alpha)$$

代入方程(25.10)后，即得到

$$\frac{\mathrm{d}^4 X_0}{\mathrm{d}z^4}=\kappa^4 X_0,\quad \kappa^4=\omega^2\frac{\rho S}{EI_y}.$$

该方程的一般积分是

$$X_0=A\cos\kappa z+B\sin\kappa z+C\cosh\kappa z+D\sinh\kappa z.$$

常数 A,B,C,D 由边界条件确定：当 $z=0,l$ 时，$X=0,\mathrm{d}X/\mathrm{d}z=0$. 结果得到

$$X_0=A\{(\sin\kappa l-\sinh\kappa l)(\cos\kappa z-\cosh\kappa z)-(\cos\kappa l-\cosh\kappa l)(\sin\kappa z-\sinh\kappa z)\}$$

和方程

$$\cos\kappa l\cosh\kappa l=1,$$

由该方程的根给出振动的固有频率. 其中最小的固有频率为

$$\omega_{\min}=\frac{22.4}{l^2}\frac{EI_y}{\rho S}.$$

习题 5 同习题 4，但是，杆的两端是简支的.

解：类似问题 4 的解，最后结果：

$$X_0 = A\sin\kappa z,$$

而频率由 $\sin\kappa l = 0$ 确定，即

$$\kappa = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

最小频率是

$$\omega_{\min} = \frac{9.87}{l^2}\frac{EI_y}{\rho S}.$$

习题 6 同习题 4，但是，杆的一端固支，另一端自由.

解：对于位移，我们得到

$$X_0 = A\{(\cos\kappa l + \cosh\kappa l)(\cos\kappa z - \cosh\kappa z) + (\sin\kappa l - \sinh\kappa l)(\sin\kappa z - \sinh\kappa z)\}$$

（在 $z=0$ 端固定；在 $z=l$ 端自由），固有频率方程

$$\cos\kappa l\cosh\kappa l + 1 = 0,$$

最小频率

$$\omega_{\min} = \frac{3.52}{l^2}\frac{EI_y}{\rho S}.$$

习题 7 试确定四边简支矩形板（边长为 a 和 b）的固有振动.

解：将式

$$\zeta = \zeta_0(x,y)\cos(\omega t + \alpha)$$

代入方程(25.6)后，即得到

$$\nabla^4\zeta_0 - \kappa^4\zeta_0 = 0, \qquad \kappa^4 = \omega^2\frac{12\rho(1-\sigma^2)}{h^2E}.$$

将板边选为坐标轴. 边界条件(12.11)现在表示为：

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = 0, \text{当 } x = 0, a,$$

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = 0, \text{当 } y = 0, b.$$

满足这些条件的解是

$$\zeta_0 = A\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

（m, n 是整数），而频率由下面的等式确定：

$$\omega = \frac{Eh}{12\rho(1-\sigma^2)}\pi^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right].$$

习题 8 试确定矩形膜（边长为 a 和 b）振动的固有频率.

解：膜的振动方程

$$T\nabla^2\zeta=\rho h\ddot{\zeta}$$

(比较平衡方程(14.9)). 膜的边必须是固定的,所以 $\zeta=0$. 相应于矩形膜的解是

$$\zeta=A\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\omega t,$$

式中固有频率

$$\omega^2=\frac{T}{\rho h}\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)$$

(m,n 是整数).

习题 9　试确定圆形,椭圆形,等边三角形和狭矩形(长条薄壁杆)截面杆扭转振动的传播速度.

解:对于圆截面(半径为 R)杆,惯性矩 $I=\pi R^4/2$,扭转刚度 C 可取自 §16 的习题 1,得到速度值为 $(\mu/\rho)^{1/2}$,它与 c_t 相同.

类似地(利用 §16 习题 2 – 4 的结果)得到椭圆截面杆的速度

$$\frac{2ab}{a^2+b^2}c_t,$$

对于等边三角形截面杆,速度为

$$(3/5)^{1/2}c_t,$$

对于狭矩形截面杆,速度为

$$2\frac{h}{d}c_t.$$

所有这些速度全都小于 c_t.

习题 10　在无限深度的不可压缩液体的表面上覆盖一个弹性薄板. 试确定当波沿薄板和液体表层同时传播时波矢量和频率之间的关系.

解:选取板平面作为 $z=0$ 的平面,而 x 轴沿波传播的方向. 设液体所在区域相对于 $z<0$ 一侧. 自由板的运动方程为

$$\rho_0 h\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=-D\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}$$

(ρ_0 为薄板材料的密度). 当存在液体时,在方程的右面应该增加一项液体作用于板面单位面积上的力,即液体的压力 p. 但是,在波中压力可以通过速度势表示为 $p=-\rho\partial\varphi/\partial t$(忽略重力场). 由此得到方程

$$\rho_0 h\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=-D\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{z=0}. \tag{1}$$

其次,在液体表面上,液体速度的法向分量必须等于板上同一点的速度,由此得到下面的条件:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0}. \tag{2}$$

势 φ 必须在液体的全部体积内满足方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \tag{3}$$

寻求 ζ 形式为 $\zeta=\zeta_0 e^{ikx-i\omega t}$ 的行波. 据此,我们取方程(3)的解为沿着液体深度衰减的表面波

$$\varphi=\varphi_0 e^{i(kx-\omega t)}e^{kz}.$$

将该表达式代入式(1)和(2),即得到关于 φ_0 和 ζ_0 的两个方程. 由方程的相容性条件得到

$$\omega^2=D\frac{k^5}{\rho+h\rho_0 k}.$$

§26 非谐振动

上面论述的整个弹性振动理论都是近似的,是基于胡克定律的弹性理论那样意义上的近似. 注意,这一理论的基础是把弹性能展为应变张量的幂级数,并且保留到二次项为止. 因此,应力张量分量就可以表示为应变张量分量的线性函数,同时运动方程也是线性的.

在这种近似时,弹性波最显著的特点是,任何波都可以表示为各单色波的简单叠加(即线性组合)形式. 每一个单色波都各自独立的传播,也可以不伴随任何无关的运动而单独存在. 可以说,同时在同一种介质中传播的不同单色波彼此"不相互作用".

可是,所有这些特性在进行下面的近似时全都消失了. 即使下面近似的效应是小的,但对于某些现象仍然能够起着主要的作用. 由于这些效应对应的运动方程是非线性的,也不可能有简单的周期(调和)解,所以通常称为**非谐效应**.

这里,我们考虑由弹性能中形变的立方项所引起的三次非谐效应. 相应运动方程的一般形式是很烦琐的. 但是,我们可借助于下面的论证来阐述非谐效应的特性. 弹性能中的立方项给出应力张量的平方项,因此,在运动方程中也有平方项出现. 设想在这些方程中,所有的线性项都移到了等式的左边,而二次项都移到了等式的右边. 用逐次近似法求解这些方程,我们应在第一次近似中舍弃所有的二次项. 这时,剩下的就是通常的线性方程了,它的解 $\boldsymbol{u}_0$ 可以用 $\text{const}\cdot e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ 形式的单色行波的叠加来表示,每一个单色波的 ω 和 $\boldsymbol{k}$ 之间都有确定的关系. 接下来作第二次近似,这时应置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u}_1$,并且在方程的右边(平方项一边)仅保留 $\boldsymbol{u}_0$ 项. 因为按照规定,$\boldsymbol{u}_0$ 满足没有右端项的齐次线性方程,故在等式的左边部分带有 $\boldsymbol{u}_0$ 的项相互约减,结果我们得到关于矢量 $\boldsymbol{u}_1$ 之分量的非齐次线性方程组,位于方程右边的是关于坐标和时间的已知函数. 这些在原方程右边代替 $\boldsymbol{u}_0$ 而得到的函数是一个和式,其中的每一项都正比于形为

$e^{i[(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}-(\omega_1-\omega_2)t]}$ 或 $e^{i[(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}-(\omega_1+\omega_2)t]}$ 的因子，这里 ω_1,ω_2 和 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2$ 是任何两个单色波第一次近似的频率和波矢量.

众所周知，这种形式的线性方程的特定积分，是在方程自由项(右端)中具有同样指数因子(并带有适当选取的系数)项之和. 其中的每一项都对应于一个具有频率 $\omega_1\pm\omega_2$ 和波矢量 $\boldsymbol{k}_1\pm\boldsymbol{k}_2$ 的行波(等于原来各波频率的和或差的频率称为**组合频率**).

这样一来，由三次非谐效应得到的结果，是在基本单色波（具有频率 ω_1, ω_2, … 和波矢量 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2$, …）的集合上，再叠加上某些弱强度"波"，这些弱波的组合频率形如 $\omega_1\pm\omega_2$，而组合波矢量形如 $\boldsymbol{k}_1\pm\boldsymbol{k}_2$. 这里，我们把它们称为带引号的"波"，是因为它们只是一些修正效应，并且不能够单独存在(某些特殊情形除外，见下面). 一般来说，$\omega_1\pm\omega_2$ 与 $\boldsymbol{k}_1\pm\boldsymbol{k}_2$ 之间，不满足通常在单色波中存在的那种频率与波矢量之间的关系.

但是，很明显，在特别选取的 $\omega_1,\boldsymbol{k}_1$ 和 $\omega_2,\boldsymbol{k}_2$ 值时，使 $\omega_1+\omega_2$ 与 $\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2$ 之间(为了确切起见，我们将只讨论和，而不讨论差)在给定介质中满足单色波存在的关系中的一个是可能的. 引入记号 $\omega_3=\omega_1+\omega_2$ 和 $\boldsymbol{k}_3=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2$，我们从数学观点上可以认为 $\omega_3,\boldsymbol{k}_3$ 对应于满足第一次近似的齐次线性运动方程(无右端项)的波. 如果在第二次近似时运动方程的右边存在具有同样 $\omega_3,\boldsymbol{k}_3$ 并与 $e^{i(\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{r}-\omega_3 t)}$ 成比例的项，则如所周知，这些方程的特定积分将是具有同样频率而振幅随着时间无限增大的波.

这样一来，当两个单色波 $\omega_1,\boldsymbol{k}_1$ 和 $\omega_2,\boldsymbol{k}_2$ 叠加(对于其和 $\omega_3,\boldsymbol{k}_3$ 满足上述的条件)时，由于非谐效应而引起**共振现象**，亦即产生现在的新单色波 $\omega_3,\boldsymbol{k}_3$ 之振幅随着时间的增加而增大，直到最后也不再变小了. 显然，如果在叠加波 $\omega_1,\boldsymbol{k}_1$ 和 $\omega_2,\boldsymbol{k}_2$ 时产生波 $\omega_3,\boldsymbol{k}_3$，则在叠加波 $\omega_1,\boldsymbol{k}_1$ 和 $\omega_3,\boldsymbol{k}_3$ 时也将发生共振，并出现波 $\omega_2=\omega_3-\omega_1$, $\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_1$，而在叠加波 $\omega_2,\boldsymbol{k}_2$ 和 $\omega_3,\boldsymbol{k}_3$ 时，也将产生波 $\omega_1,\boldsymbol{k}_1$.

特别是，在各向同性物体中，可借助于 $\omega=c_t k$ 或 $\omega=c_l k$ 将 ω 和 $\boldsymbol{k}$ 联系起来，而且 $c_l>c_t$. 不难看出，在这种情形下，这些关系中的任何一个，对于三个波($\omega_1,\boldsymbol{k}_1$; $\omega_2,\boldsymbol{k}_2$ 和 $\omega_3=\omega_1+\omega_2$, $\boldsymbol{k}_3=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2$)中的每一个都能成立. 如果 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 的方向不相同，则 $k_3<k_1+k_2$，因此，很明显，这样的 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2$ 只能在下面的两种情形下发生**共振**：(1) $\omega_1,\boldsymbol{k}_1$ 和 $\omega_2,\boldsymbol{k}_2$ 是横波，而 $\omega_3,\boldsymbol{k}_3$ 是纵波；(2) $\omega_1,\boldsymbol{k}_1$ 或 $\omega_2,\boldsymbol{k}_2$ 中有一个是纵波，另一个是横波，而 $\omega_3,\boldsymbol{k}_3$ 是纵波. 如果矢量 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 的方向相同，则在三个波全都是纵波或全都是横波的情形时即可发生共振.

引起共振现象的非谐效应不仅在某些单色波叠加时发生，而且，在有的情况下，总共只有一个波 $\omega_1,\boldsymbol{k}_1$ 时也能发生. 在这种情形下，在运动方程的右边有与 $e^{2i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t)}$ 成比例的项. 但是，如果 $\omega_1,\boldsymbol{k}_1$ 满足通常的关系式，则(由于这是一次齐次关系式) $2\omega_1$, $2\boldsymbol{k}_1$ 也满足这一关系式. 这样一来，除了已存在的单色波 ω_1,

$\boldsymbol{k}_1$ 之外，非谐效应还导致出现了具有二倍频率和二倍波矢量($2\omega_1, 2\boldsymbol{k}_1$)的波，而且这个波的振幅随着时间的增加而增大.

最后，我们简单地谈谈，如何建立考虑非谐项的运动方程. 现在，应变张量必须由完全的表达式(1.3)确定：

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \tag{26.1}$$

在该式中不可以忽略 u_i 的平方项. 其次，对于已知对称的物体，能量密度 ε[①] 的一般表达式应该写成标量形式，这些标量是由张量 u_{ik} 的分量和一些表征物体材料特性的常张量组成，其中包含 u_{ik} 的项应达到所希望的幂次. 然后，将关于 u_{ik} 的表达式(26.1)代入，并弃去 u_i 的过高幂次的项，我们便得到能量 ε，它是导数 $\partial u_i/\partial x_k$ 的函数，并具有所希望的精度.

为了得到运动方程，我们注意下面的结果. 变分 $\delta\varepsilon$ 可以写为

$$\delta\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial(\partial u_i/\partial x_k)}\delta\frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$

或者，引入记号：

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial(\partial u_i/\partial x_k)}, \tag{26.2}$$

改写 $\delta\varepsilon$ 为如下形式：

$$\delta\varepsilon = \sigma_{ik}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik}\delta u_i) - \delta u_i\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

式中 $-\delta u_i$ 的系数是物体单位体积上之合应力的分量，它们具有和以前一样的形式. 因此运动方程依然能够写为

$$\rho_0\ddot{u}_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{26.3}$$

式中 ρ_0 是物体未形变时的密度，而张量分量 σ_{ik}，现在按式(26.2)由具有希望精度的 ε 来确定. 张量 σ_{ik} 现在不是对称的.

我们着重指出，现在这里 σ_{ik} 已不再具有动量通量密度(应力张量)的意思. 在通常的理论中，这样的解释是由物体的体力密度(单位体积的合应力) $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ 按物体体积积分而得出的. 在这种情形下，主要的是，积分时我们没有区分形变前与形变后物体上点坐标的不同，忽略了它们之间的差别. 但是，在转入随后的近似时，这样的忽略变为不可能了，而且，限定积分区域的表面与所研究物体形变以后的区域的真实表面是不一样的.

在§2中已经指出，张量 σ_{ik} 的对称性与动量矩守恒相联系. 现在，这个结论

---

① 这里我们说的是内能 ε，而不是自由能 F，因为这里所讨论的问题是关于绝热振动的.

不再成立，这是因为动量矩密度不应写为 $x_i\dot{u}_k - x_k\dot{u}_i$，而应写为

$$(x_i + u_i)\dot{u}_k - (x_k + u_k)\dot{u}_i.$$

习　　题

习题　试将各向同性物体弹性能的一般表达式写成三次近似形式.

解：由二阶对称张量的分量可以组成两个平方标量（u_{ik}^2 和 u_{ll}^2）以及三个立方标量（$u_{ll}^3, u_{ll}u_{ik}^2, u_{ik}u_{il}u_{kl}$）. 因此，包含 u_{ik} 二次幂和三次幂的项并具有标量系数（各向同性体！）的标量表达式的最一般形式，是

$$\varepsilon = \mu u_{ik}^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3}\right)u_{ll}^2 + \frac{A}{3}u_{ik}u_{il}u_{kl} + Bu_{ik}^2 u_{ll} + \frac{C}{3}u_{ll}^3$$

（u_{ik}^2 和 u_{ll}^2 前面的系数通过压缩模量和剪切模量表示；A, B, C 是三个新的常数）. 将 u_{ik} 的表达式(26.1)代入上式，并保留到三次项，则得到如下形式的弹性能：

$$\begin{aligned}\varepsilon = &\frac{\mu}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3}\right)\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2 + \\ &+ \left(\mu + \frac{A}{4}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \left(\frac{B+K}{2} - \frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 + \\ &+ \frac{A}{12}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{B}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{C}{3}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^3.\end{aligned}$$

第四章

位　　错[1]

§27　存在位错时的弹性形变

在晶体中弹性形变不仅与作用其上的外力有关，而且与其结构内部的缺陷有关．对于晶体的力学性质来说，存在缺陷的主要形式是所谓的**位错**．从原子，分子的观点来研究位错自然不在本书计划之内．我们这里仅从弹性理论的观点对这一现象进行纯宏观方面研究．但是，为了更好地理解所得到关系式的物理意义，我们预先用两个简单的例子从晶体晶格结构的观点来说明存在位错缺陷的性质．

设想在晶格（截面表示在图22上）中移入一个“附加的（多余的）”晶体半平

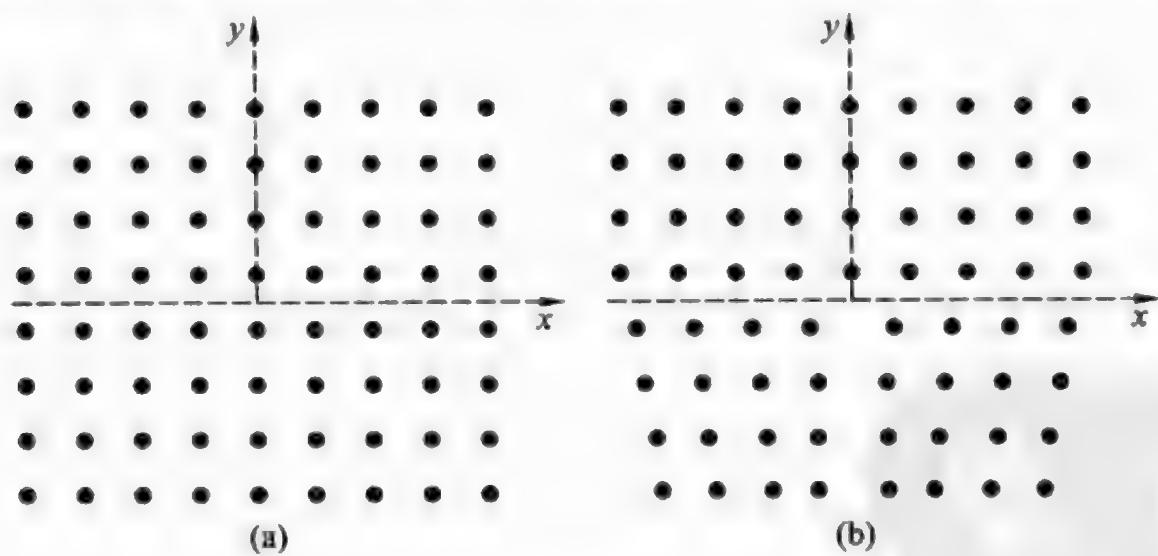


图 22[2]

[1] 本章是与科谢维奇（A. M. Косевич）共同编写的．

[2] 在俄文原版中，图22只有图（a），图（b）是为了便于阅读由译者加的．图（a）可以看作是晶体的晶格结构图，图（b）是发生了位错的晶格结构图．　　——译者注

面（在图上跟上半平面 yz 重合）. 在这种情形下，该半平面的边缘线（垂直于图平面的 z 轴）称为**刃型位错**. 在直接邻近位错的附近，晶格结构的畸变是非常大的，然而，在几个晶格周期数量级的距离上晶面彼此已经几乎按正确的方式结合了. 但是，即使是远离位错，形变也存在. 它清楚地显示，当在 xy 平面（图(b)）上按着晶格格点沿闭合回路[①]环绕坐标原点绕行一周时，如果每个格点离开它在理想晶格位置的位移由矢量 $\boldsymbol{u}$ 确定，则在绕行时，该矢量的总增量将不为零，而等于沿 x 轴的一个晶格周期的矢量.

其它类型的位错也可以直观地想象为用半平面晶格"切开"的结果，然后，切口两边的晶格部分在切口边缘彼此相对平行地滑移一个晶格周期，这种情形称为**螺型位错**. 这样位错的存在，把晶格的晶面变成了螺旋面（类似于没有台阶的螺旋状楼梯）. 在环绕位错线（螺旋面的轴）绕行一个完全回路时，格点的位移矢量获得了平行位错线的一个晶格周期的增量. 图 23 表示描绘切口的图解.

从宏观观点来看，晶体的位错形变就像连续介质一样，在一般情形下，具有如下特点：当沿着包含位错线 D 的任何闭合回路 L 绕行一周后，弹性位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 获得确定的有限增量 $\boldsymbol{b}$ 等于（按大小和方向）一个晶格周期，常矢量 $\boldsymbol{b}$ 称为给定位错的**伯格斯**（Burgers）**矢量**. 这个特性可以描述为

$$\oint_L \mathrm{d}\, u_i = \oint_L \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \mathrm{d}\, x_k = -b_i, \tag{27.1}$$ [②]

而环绕回路 L 的方向与选择位错线切矢量 τ 方向（图 24）的关系，采用右螺旋法则. 位错线本身就是此时形变场中特殊点（奇异点）的连线.

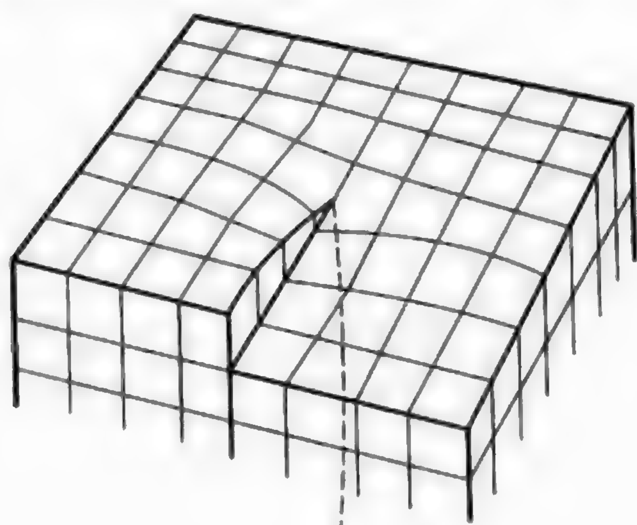


图 23

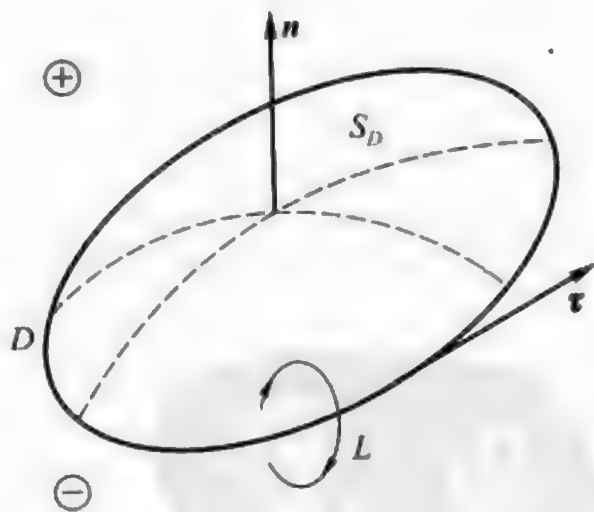


图 24

上面提到的刃型位错和螺型位错的简单情形与 D 是直线的位错相符合，此

① 与闭合回路的大小无关，但必须按晶格的格点绕行.　　——译者注

② 式(27.1) 通常称为位错条件.　　——译者注

时沿着位错线 $\boldsymbol{\tau}\perp\boldsymbol{b}$(刃型位错)或 $\boldsymbol{\tau}/\!/\boldsymbol{b}$(螺型位错). 同时注意到,在图 22(b)上表示的刃型位错,$\boldsymbol{b}$ 具有相反的方向,区别在于"附加的"晶体半平面位于平面 xy 的上方还是下方(换句话说,用符号来区别这两种位错[1]).

在一般情形下,位错是曲线,沿着该曲线 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角是变化的. 而沿着整个位错线伯格斯矢量 $\boldsymbol{b}$ 本身必然是常量. 这样很明显,位错线不可能简单地终止在晶体的内部(比较本页脚注③). 它在晶体表面上应该出来两个端点或者(如通常在实际情况中发生的那样)是闭合的环(称为**位错环**).

换句话说,条件(27.1)表示,当存在位错时,环绕位错线一周得到确定增量的位移矢量是坐标的多值函数. 当然,实际上没有任何的多值性,增量 $\boldsymbol{b}$ 表示阵点在一个晶格周期上附加的位移,一般不改变晶格状态. 特别是,描述晶体弹性状态的应力张量 σ_{ik} 是坐标的单值连续函数.

为了今后方便起见,引入记号

$$w_{ik}=\frac{\partial u_k}{\partial x_i},\tag{27.2}$$

利用该记号,条件(27.1)可写为

$$\oint_L w_{ik}\mathrm{d}\,x_i=-b_k.\tag{27.3}$$

张量 w_{ik}(非对称)通常称为**畸变张量**. 它的对称部分给出通常的应变张量:

$$u_{ik}=\frac{1}{2}(w_{ik}+w_{ki}).\tag{27.4}$$

与多值函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ 相反,张量 w_{ik} 和 u_{ik} 是坐标的单值函数.

条件(27.3)也可以写成微分形式. 为此,将按回路 L 的积分,变换为跨越该回路所确定的任何一个曲面 S_L 的积分[2]:

$$\oint_L w_{mk}\mathrm{d}\,x_m=\int_{S_L}e_{ilm}\frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l}\mathrm{d}\,f_i.\tag{27.5}$$

因为张量 e_{ilm} 关于指标 l,m 反称,而张量 $\partial w_{mk}/\partial x_l=\partial^2u_k/\partial x_l\partial x_m$ 关于指标 l,m 对称,故被积分表达式除了位错线 D 与曲面 S_L 的交点外处处恒等于零. 在作为特殊点连线的位错线上,以式(27.2)导数形式表示的 w_{mk} 失去了意义[3]. 在这些点上,w_{ik} 的值应借助于相应的 δ - 函数,以使积分(27.5)得到所要求的 $-b_k$ 值.

---

① 一般有两种方法确定符号:其一,规定"附加的"半平面在上方 $\boldsymbol{b}$ 取正,为正刃型位错,在下方 $\boldsymbol{b}$ 取负,为负刃型位错;其二,与上面的规定完全相反. ——译者注

② 根据斯托克斯定理做变换,将线元 $\mathrm{d}\,x_m$ 的积分单元按下面算子进行代换:$\mathrm{d}\,x_m\to e_{ilm}\mathrm{d}\,f_i\frac{\partial}{\partial x_l}$,式中 e_{ilm} 为反称单位张量,$\mathrm{d}f$ 为面元. 注意到形如 $e_{ilm}a_ib_l$ 的表达式是矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之矢量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的第 m 分量.

③ 如果位错线终止在物体内部的任何点,就可以选择曲面 S_L 把该点包围起来,因此,无论什么地方它都不能相交于 D 线,于是式(27.5)的积分化为零,这与所提出的条件矛盾.

设 $\boldsymbol{\xi}$ 是在垂直于矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 的平面上从位错轴向平面上给定点的二维径矢. 该平面的面元用曲面 S_L 的面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 表示为 $\boldsymbol{\tau}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f}$. 根据二维 δ – 函数的定义,对于 $\delta(\boldsymbol{\xi})$ 有

$$\int\delta(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\tau}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f}=\tau_i\int_{S_L}\delta(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}f_i=1.$$

因此,很明显,为了达到所提出的目标,我们必须置

$$e_{ilm}\frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l}=-\tau_i b_k\delta(\boldsymbol{\xi}). \tag{27.6}$$

这就是所要求的条件(27.3)的微分表示法.

如果已知给定各向异性介质平衡方程的格林张量 G_{ik},在位错周围的位移场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ 可以表示为一般形式,亦即确定在无限介质的坐标原点沿着 x_k 轴方向作用单位集中力时产生的位移分量 u_i 的函数(参见 § 8). 这借助于如下形式的方法不难做出.

我们不去寻求平衡方程的多值解,而是把 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ 作为单值函数来考虑. 假设在某个任意选取的跨越位错环 D 的曲面 S_D 上,位移受到给定的突变 $\boldsymbol{b}$,如果 $\boldsymbol{u}_+$ 和 $\boldsymbol{u}_-$ 是对应于曲面 S_D 间断(不连续)边缘的上岸(边)和下岸(边)的函数值,则

$$\boldsymbol{u}_+-\boldsymbol{u}_-=\boldsymbol{b}. \tag{27.7}$$

(这里"上"岸和"下"岸的规定表示在图 24 上:在用图表示矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 的方向时,使曲面 S_D 的法矢量 $\boldsymbol{n}$ 从下岸指向上岸). 沿回路 L 从上岸向下岸积分,这样可使式(27.3)的结果带有正号. 按式(27.3)和(27.4)形式地确定张量 w_{ik} 和 u_{ik},在"间断曲面"上将具有 δ – 型的奇异性:

$$w_{ik}^{(S)}=n_i b_k\delta(\zeta),\quad u_{ik}^{(S)}=\frac{1}{2}(n_i b_k+n_k b_i)\delta(\zeta), \tag{27.8}$$

式中 ζ 是从曲面 S_D 起算的沿其法矢量 $\boldsymbol{n}$ 方向的坐标($\mathrm{d}\zeta=\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为回路 L 的线元).

因为在环绕位错的介质中实际上没有任何物理上的奇异性,故如已经指出的那样,应力张量 σ_{ik} 必须是处处连续的单值函数. 但是,与应变张量(27.8)形式上的关联的应力张量是

$$\sigma_{ik}^{(S)}=\lambda_{iklm}u_{lm}^{(S)},$$

它在曲面 S_D 上也具有奇异性. 为了清除它,必须引入一个虚构的沿着曲面 S_D 分布并具有确定密度 $\boldsymbol{f}^{(S)}$ 的体力. 存在体力时的平衡方程为

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+f_i^{(S)}=0.$$

由此很明显,必须置

$$f_i^{(S)} = -\frac{\partial \sigma_{ik}^{(S)}}{\partial x_k} = -\lambda_{iklm}\frac{\partial u_{lm}^{(S)}}{\partial x_k}. \tag{27.9}$$

这样一来，关于寻求多值函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ 的问题，就相当于寻求由公式(27.7)和(27.9)确定的有体力的单值不连续函数的问题. 现在可以利用公式

$$u_i(\boldsymbol{r}) = \int G_{ij}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')f_j^{(S)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'.$$

将式(27.9)代入上式并进行分部积分；无限远处的曲面积分消失了，而按 δ－函数的体积分是无足轻重的，故弃之. 同时作代换 $\partial G_{ij}/\partial x_k' = -G_{ij}/\partial x_k$，最后我们得到

$$u_i(\boldsymbol{r}) = -\lambda_{jklm}b_m\int_{S_D} n_l\frac{\partial}{\partial x_k}G_{ij}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}f'. \tag{27.10}$$

从而给出了问题的解[①].

在远离闭合位错环时，形变(27.10)具有极简单的形式. 如果现在我们设想位错环位于坐标原点附近，则在距离很远（与位错环的大小相比较）时，在导数 $\partial G_{ij}/\partial x_k$ 中，可令 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\approx\boldsymbol{r}$，并将其提到积分号外面. 于是得到

$$u_i(\boldsymbol{r}) = -\lambda_{jklm}d_{lm}\frac{\partial G_{ij}(\boldsymbol{r})}{\partial x_k}, \tag{27.11}$$

式中

$$d_{ik} = S_ib_k,\quad S_i = \int_{S_D} n_i\mathrm{d}f = \frac{1}{2}e_{ikl}\oint_D x_k\mathrm{d}x_l. \tag{27.12}$$

轴矢量 $\boldsymbol{S}$ 的分量，等于位错环 D 在垂直于相应坐标轴的平面上所限定的投影面积，故张量 d_{ik} 自然地称为**位错矩张量**. 张量 G_{ij} 的分量是关于坐标 x,y,z 的一次齐次函数（参见 § 8 的习题）. 因此，由式(27.11)可见，$u_i\propto 1/r^2$，而相应的应力场 $\sigma_{ik}\propto 1/r^3$.

同样不难说明，在直线位错周围的弹性应力与距离关系的特性. 在柱坐标 z,r,φ（z 轴沿着位错线）中，形变将只依赖于 r 和 φ. 特别是，在平面 xy 上任何回路的大小作任意相似变换时，积分(27.3)都必须是不变的. 显然，这只有当所有的 $w_{ik}\propto 1/r$ 时才是可能的，张量 u_{ik} 同样也正比于 $1/r$，并因此应力张量 $\sigma_{ik}\propto 1/r$[②].

虽然直到现在我们只说到了位错，但是所得到的公式，也可应用于由晶体结

① 对于各向异性介质，张量 G_{ij} 的推导，在第 30 页脚注里所指出的文献中. 一般来说，这个张量是很复杂的. 在直线位错的情形，我们遇到的是弹性平面问题，可以更简单地直接表示平衡方程的解.

② 我们注意到，确定位错线周围的弹性形变场和确定直线导体的磁场是类似的，此时，伯格斯矢量起着电流强度的作用. 但是，且不说两者物理现象的性质是完全不同的，由于张量对应值的性质不相同，其类似性的程度也减小了.

构其它类型缺陷引起的形变. 位错是结构的线缺陷. 此外, 还存在这样的缺陷, 它使正常结构的破坏传播到某个表面附近区域[1]. 从宏观观点来看, 这样的缺陷可以作为一个间断面来描述, 在这个间断面上, 位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 发生了突变(而由于平衡条件, 应力 σ_{ik} 仍然是连续的). 如果在整个面上突变量 $\boldsymbol{b}$ 的大小是相同的, 则在由这种间断产生的形变与沿间断边缘分布位错产生的形变这方面是没有任何区别的, 不同之处只是矢量 $\boldsymbol{b}$ 不再等于晶格周期. 而关于曲面 S_D 的情况前面已经说过, 它不再是任意的, 而必须与实际间断的真实分布一致. 具有这种间断的面与一定的附加能量相关联, 这个能量可以用引入适当的表面张力系数的方法描述.

习　题

习题 1　试写出用位移矢量表示的各向同性介质中位错形变的平衡微分方程[2].

解: 利用应力张量或应变张量来表示平衡方程通常具有的形式是 $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k=0$, 或用式(5.11)代替 σ_{ik}, 则有

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k}+\frac{\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i}=0. \tag{1}$$

但是, 在代换为矢量 $\boldsymbol{u}$ 时, 必须考虑微分条件(27.6). 用 e_{ikn} 乘式(27.6)并按 i,k 缩并, 得[3]

$$\frac{\partial w_{nk}}{\partial x_k}-\frac{\partial w_{kk}}{\partial x_n}=-(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{b})_n\delta(\boldsymbol{\xi}). \tag{2}$$

将式(1)重新写为

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\frac{\partial w_{ki}}{\partial x_k}+\frac{\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial w_{ll}}{\partial x_i}=0$$

并将式(2)代入该式, 则得

$$\frac{\partial w_{ki}}{\partial x_k}+\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial w_{ll}}{\partial x_i}=(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{b})_i\delta(\boldsymbol{\xi}).$$

现在按式(27.2)将其代换为 $\boldsymbol{u}$, 我们得到所求的关于多值函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ 的方程

$$\nabla^2\boldsymbol{u}+\frac{1}{1-2\sigma}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{b}\delta(\boldsymbol{\xi}). \tag{3}$$

该方程的解必须满足条件(27.1).

---

[1] 这类缺陷熟知的例子是晶体中的孪晶间层.

[2] 假定该习题和其它习题的实际意义属于各向同性介质, 因为按其固有的性质, 真实的位错只发生在晶体即各向异性介质中. 然而, 这些习题提供了一定的直观说明的意义.

[3] 借助于公式: $e_{ilm}e_{ikn}=\delta_{lk}\delta_{mn}-\delta_{ln}\delta_{mk}$.

习题 2 试确定各向同性介质中直线螺型位错周围的形变.

解:选取柱坐标 z,r,φ,其中 z 轴沿着位错线. 伯格斯矢量:$b_x=b_y=0,b_z=b$. 由对称性考虑显见,位移 $\boldsymbol{u}$ 平行 z 轴,并与坐标 z 无关. 习题 1 中的平衡方程(3)归结为 $\nabla^2 u_z=0$. 满足条件(27.1)的解①:

$$u_z=\frac{b}{2\pi}\varphi.$$

张量 u_{ik} 和 σ_{ik} 中,不为零的分量只有

$$u_{z\varphi}=\frac{b}{4\pi r},\sigma_{z\varphi}=\frac{\mu b}{2\pi r},$$

所以,这里的形变是纯剪形变.

位错(每单位长度上)的自由能由下面的积分给出

$$F=\frac{1}{2}\int 2u_{z\varphi}\sigma_{z\varphi}\mathrm{d}V=\frac{\mu b^2}{4\pi}\int\frac{\mathrm{d}r}{r},$$

在下限和上限,对数是发散的. 作为下限应取原子距离的数量级($\sim b$),在这一数量级上,大的形变和宏观理论已不适用. 而上限取位错长度 L 的数量级. 于是

$$F=\frac{\mu b^2}{4\pi}\ln\frac{L}{b}.$$

而在位错"芯"附近的形变能(在横截面区域的数量级 $\sim b^2$),可以估计它的数量级为 $\sim\mu b^2$. 当 $\ln\left(\frac{L}{b}\right)\gg 1$ 时,这个能量与其总的弹性形变能相比较是个小量②.

习题 3 试确定在各向异性介质中垂直于晶体对称面的螺型位错附近的应力.

解:选取坐标系 x,y,z,使 z 轴与位错线一致(并重新写出 $b_z=b$). 矢量 $\boldsymbol{u}$ 仍然只有分量 $u_z=u(x,y)$. 因为 xy 平面是对称面,故张量 λ_{iklm} 的所有分量中,指标 z 相遇奇数次的分量都等于零. 所以,张量 σ_{ik} 不为零的分量只有两个:

$$\sigma_{xz}=\lambda_{xzxz}\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda_{xzyz}\frac{\partial u}{\partial y},\quad \sigma_{yz}=\lambda_{yzxz}\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda_{yzyz}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

引入二维参数矢量 $\boldsymbol{\sigma}$ 和张量 $\lambda_{\alpha\beta}$:$\sigma_\alpha=\sigma_{\alpha z},\lambda_{\alpha\beta}=\lambda_{\alpha z\beta z}(\alpha=1,2)$. 于是

$$\sigma_\alpha=\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta},$$

而平衡方程写为 $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=0$. 该方程的解必须满足条件(27.1):$\oint\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=b$.

---

① 在所有关于直线位错的习题中都选取矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 为 z 轴的负方向.

② 这个估计具有普遍性,并且,在数量级上对于任何(不仅是螺型)位错都是正确的. 应该指出,事实上,通常 $\ln(L/b)$ 的值不很大,以致使"芯"的能量成为位错总能量的明显部分.

这种问题的形式与在各向异性介质(具有导磁率 $\lambda_{\alpha\beta}$)中直线电流强度 $I=cb/4\pi$ 附近的磁场感应和磁场强度问题(它们起着 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 ∇u 的作用)是一样的. 由电动力学利用该问题熟知的解,我们得到

$$\sigma_{\alpha z}=-\frac{b}{2\pi}\frac{\lambda_{\alpha\beta}e_{\beta\gamma z}x_{\gamma}}{\sqrt{|\lambda|\lambda^{-1}_{\alpha'\beta'}x_{\alpha'}x_{\beta'}}},$$

式中的 $|\lambda|$ 是张量 $\lambda_{\alpha\beta}$ 的行列式(参见第八卷 §30 之习题 5).

习题 4 试确定在各向同性介质中直线刃型位错周围的形变.

解: 设 z 轴方向沿着位错线,而伯格斯矢量: $b_x=b,b_y=b_z=0$. 由问题的对称性显见,位移矢量位于 xy 平面上并且与 z 无关. 因此,我们遇到的是平面问题. 该问题下面的所有矢量及其运算都是二维的,即在 xy 平面上.

寻求方程

$$\nabla^2\boldsymbol{u}+\frac{1}{1-2\sigma}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}=-bj\delta(\boldsymbol{r})$$

的解(见习题 1; $\boldsymbol{j}$ 是沿 y 轴的单位矢量),其解的形式为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^{(0)}+\boldsymbol{w}$,其中 $\boldsymbol{u}^{(0)}$ 为一矢量,其分量为

$$u_x^{(0)}=\frac{b}{2\pi}\varphi,\quad u_y^{(0)}=\frac{b}{2\pi}\ln r$$

$\left(\frac{b}{2\pi}\ln(x+\mathrm{i}y)\text{ 的虚部和实部}\right)$; r,φ 是在 xy 平面上的极坐标. 这个矢量满足条件(27.1). 因此,问题与所求的单值函数 w 相符. 因为极易确信

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{(0)}=0,\nabla^2\boldsymbol{u}^{(0)}=bj\delta(\boldsymbol{r}),$$

所以, $\boldsymbol{w}$ 满足方程

$$\nabla^2\boldsymbol{w}+\frac{1}{1-2\sigma}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{w}=-2bj\delta(\boldsymbol{r}).$$

这个方程就是具有体积密度为 $\frac{Ebj}{1+\sigma}\delta(\boldsymbol{r})$ 的集中力沿着 z 轴作用时的平衡方程(比较 §8 习题中的方程(1)). 借助于在那个问题中得到的无限介质里面的格林张量来寻求 $\boldsymbol{w}$,就把问题归结为计算积分

$$\boldsymbol{w}=\frac{b}{8\pi(1-\sigma)}2\int_0^{\infty}\left[\frac{(3-4\sigma)\boldsymbol{j}}{R}+\frac{\boldsymbol{r}y}{R^3}\right]\mathrm{d}z',\quad R=\sqrt{r^2+z'^2}.$$

最后得到

$$u_x=\frac{b}{2\pi}\left\{\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{xy}{x^2+y^2}\right\},$$

$$u_y=-\frac{b}{2\pi}\left\{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\ln\sqrt{x^2+y^2}+\frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right\}.$$

由此计算应力张量,其笛卡儿坐标的分量为

$$\sigma_{xx}=-bB\frac{y(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},\sigma_{yy}=bB\frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},\sigma_{xy}=bB\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

极坐标的分量为

$$\sigma_{rr}=\sigma_{\varphi\varphi}=-bB\frac{\sin\varphi}{r},\sigma_{r\varphi}=bB\frac{\cos\varphi}{r},$$

式中 $B=\dfrac{\mu}{2\pi(1-\sigma)}$.

习题 5 在各向同性介质中,在垂直于伯格斯矢量的同一个平面上,分布着彼此相互平行并且具有相同距离 h 的无限个直线刃型位错. 试求由这样的"位错间壁"产生的在距离远远大于 h 处的剪应力.

解:设位错与 z 轴平行并位于 yz 平面上. 根据习题 4 的结果,所有位错在 x, y 点产生的总应力由下面的和式给出:

$$\sigma_{xy}(x,y)=bBx\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x^2-(y-nh)^2}{[x^2+(y-nh)^2]^2}.$$

将这一和式重新写为如下形式:

$$\sigma_{xy}(x,y)=-bB\frac{\alpha}{h}\left[J(\alpha,\beta)+\alpha\frac{\partial J(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right],$$

式中

$$J(\alpha,\beta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2+(\beta-n)^2},\quad \alpha=\frac{x}{h},\quad \beta=\frac{y}{h}.$$

按泊松求和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{2\pi ikx}\mathrm{d}\,x$$

求得

$$J(\alpha,\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\alpha^2+\xi^2}+2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{2\pi ik\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\pi ik\xi}\mathrm{d}\,\xi}{\alpha^2+\xi^2}=\frac{\pi}{\alpha}+\frac{2\pi}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\pi k\alpha}\cos(2\pi k\beta).$$

当 $\alpha=\dfrac{x}{h}>>1$ 时,按 k 求和可只保留第一项,最后得到

$$\sigma_{xy}=4\pi^2B\frac{bx}{h^2}\mathrm{e}^{-2\pi x/h}\cos\left(2\pi\frac{y}{h}\right).$$

由此可见,随着远离位错间壁,应力按指数规律递减.

习题 6 试确定在各向同性介质中位错环周围的形变(伯格斯(J. M. Burgers),1939).

解:根据公式(27.10),对于各向同性介质,按式(5.9)和(5.11),张量 λ_{iklm} 可以表为

$$\lambda_{iklm}=\mu\left\{\frac{2\sigma}{1-2\sigma}\delta_{ik}\delta_{lm}+\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl}\right\}.$$

对于各向同性介质，格林张量已在 §8 的习题中求得，并可表为

$$G_{ik}(\boldsymbol{R})=\frac{1}{16\pi\mu(1-\sigma)R}\{(3-4\sigma)\delta_{ik}+\nu_i\nu_k\}.$$

式中，$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 为从单元 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}'$（在 $\boldsymbol{r}'$ 点，称为源点）指向观察形变的点（$\boldsymbol{r}$ 点，称为场点）的径矢，$\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{R}/R$ 为 $\boldsymbol{R}$ 方向的单位矢量. 将该表达式代入(27.10)，并在积分中进行微分，计算后得到

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=\frac{1-2\sigma}{8\pi(1-\sigma)}\int_{S_D}\frac{1}{R^2}\{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f}')+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu})\mathrm{d}\boldsymbol{f}'-\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f}')\}+$$

$$+\frac{3}{8\pi(1-\sigma)}\int_{S_D}\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f}'). \tag{1}$$

位于式中的曲面积分可以通过沿回路 D（位错环）的积分表示，为此利用下面的公式：

$$\oint_D\frac{1}{R}\boldsymbol{b}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=\int_{S_D}\frac{1}{R^2}\{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu})\mathrm{d}\boldsymbol{f}'-\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f}')\},$$

$$\oint_D(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\nu})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=-\int_{S_D}\frac{1}{R}\{\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f}'+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f}')\}.$$

等式右边的积分是由左边的闭路周线积分应用斯托克斯定理得到的，据此，进行代换：$\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\to\mathrm{d}\boldsymbol{f}'\times\nabla'$（其中，$\nabla'=\partial/\partial\boldsymbol{r}'$）. 因为被积分表达式只与差 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 有关，这个代换等价于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\to-\mathrm{d}\boldsymbol{f}'\times\nabla$（其中，$\nabla=\partial/\partial\boldsymbol{r}$）. 现在我们引入从观察点（场点）$\boldsymbol{r}$ 对环 D 所张的立体角 Ω，按照定义显然有

$$\Omega=\int\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nu}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f}'.$$

于是，位移场可表为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{b}\frac{\Omega}{4\pi}+\frac{1}{4\pi}\oint_D\frac{1}{R}\boldsymbol{b}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}'+\frac{1}{8\pi(1-\sigma)}\nabla\oint_D(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\nu})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}'.$$

这个函数的多值性包含在第一项，当环绕 D 线绕行一圈时，立体角 Ω 改变了 4π.

远离环时，表达式(1)归结为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=\frac{1-2\sigma}{8\pi(1-\sigma)R^2}\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu})+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\nu})-\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{b})\}+\frac{3}{8\pi(1-\sigma)R^2}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}.$$

该式也可以直接从式(27.11)，(27.12)得到.

§28　应力场对位错的作用

现在让我们在由外荷载作用于物体而产生的弹性应力场 $\sigma_{ik}^{(e)}$ 中来研究位错环 D，并计算应力场对位错环的作用力. 为此，按常规作法应求出位错在其无限小的位移上所做的功 δR_D.

我们回到§27 提出的概念，即关于把位错环 D 作为跨越它的曲面(S_D)上位移矢量间断(不连续)的线，其间断量的大小由公式(27.7)给出. 位错线 D 的位移将导致曲面 S_D 发生变化. 设 $\delta\boldsymbol{x}$ 为位错环 D 上各点的位移矢量，当位移 $\delta\boldsymbol{x}$ 时，位错线线元 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}$ 扫过的面积 $\delta\boldsymbol{f}=\delta\boldsymbol{x}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(\delta\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\tau})\,\mathrm{d}\,l$ 确定了曲面 S_D 面积的增量. 因为现在所说的是位错的实际位移，就必须考虑上述运算带来的介质实际体积的变化. 因为介质在曲面两边(岸)上的点之位移 $\boldsymbol{u}$ 相差一个 $\boldsymbol{b}$，所以体积变化由下面的乘积给出：

$$\delta V=\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f}=(\delta\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{b}\mathrm{d}f=\delta\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{b})\mathrm{d}f. \tag{28.1}$$

因此，可能存在两种不同的物理情况. 其中之一是 $\delta V\equiv0$，即位错线的位移与体积变化无关. 如果位移发生在由矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 确定的平面上，就会出现这种情况，这个平面称为给定位错元的**滑移面**. 位错环 D 的所有线元滑移面的包络线族称为位错的**滑移表面**，它是母线平行于伯格斯矢量 $\boldsymbol{b}$ 的柱面①. 滑移面的物理特性只在于，在滑移面上位错比较轻微的机械运动是可能的(通常将这种情形称为**滑移**)②.

和位错位移时曲面 S_D 面积的变化一样，在位错线 D 上集中的畸异应变(27.8)也发生变化. 这个变化可以表示为

$$\delta u_{ik}^{(\mathrm{pl})}=\frac{1}{2}\{b_i(\delta\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\tau})_k+b_k(\delta\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\tau})_i\}\delta(\boldsymbol{\xi}), \tag{28.2}$$

式中 $\delta(\xi)$ 是在§27 中引入的二维 δ - 函数. 我们着重指出，这个形变由位错线 D 的形状和位移 $\delta\boldsymbol{x}$ 唯一地确定，它与式(27.8)的区别是后者与任意选取的曲面 S_D 有关.

表达式(28.2)描述的是没有伴随弹性应力的局部非弹性残余形变(称为**塑性形变**)，与其有关的由外源③最后完成的功由下面的积分给出：

$$\int\sigma_{ik}^{(e)}\delta u_{ik}\mathrm{d}V$$

(比较式(3.2))，式中的 δu_{ik} 应理解为形变时总的几何变化. 它是由弹性部分和塑性部分组成的. 在这里对我们感兴趣的只是与塑性部分有关的功④. 将式(28.2)的 $\delta u_{ik}^{(\mathrm{pl})}$ 代入后，由于其中存在 δ - 函数，只剩下沿位错环 D 长度的积分：

---

① 在真正的各向异性介质中，滑移面的可能形式是由其晶体的晶格结构确定的.

② 例如，对于表示在图 22 上的刃型位错在其滑移面(xz 平面)上的运动，是比较轻微的原子移动，结果使晶体半平面离开 yz 平面愈来愈远，成为"附加的"半平面.

③ 按照位错理论，除位错本身引起的应力场外，引起应力场的其它缺陷或应力源，包括外力(面力和体力)均为"外源". ——译者注

④ 在推导运动方程时，虚塑性形变和虚弹性形变必须作为独立变量来考虑. 而位错运动方程关心的只需要考虑塑性形变.

$$\delta R_D = \oint_D \sigma_{ik}^{(e)} e_{ilm} \delta x_l \tau_m \mathrm{d}\, l. \tag{28.3}$$

在被积分表达式里面，δx_l 近旁的系数是在单位长度位错线上作用的力 f_l. 于是

$$f_i = e_{ikl} \tau_k \sigma_{lm}^{(e)} b_m \tag{28.4}$$

(M. O. Peach, J. S. Köhler, 1950). 注意，力 $\boldsymbol{f}$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{\tau}$，即垂直于位错线.

可以给式(28.3)一个直观的解释. 按照前面的叙述，位错线线元的位移扫出某一切口面积 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$，并且切口的上岸对下岸移动了一个 $\boldsymbol{b}$ 的长度. 由内部的应力加在 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 上的力为 $\sigma_{ik}^{(e)} \mathrm{d} f_k$，而在滑移时该力所做的功为 $b_i \sigma_{ik}^{(e)} \mathrm{d} f_k$.

因为式(28.4)的表示形式只与在滑移面上的位移有关，所以力 $\boldsymbol{f}$ 在该平面上的分量便可立即写出，设 $\boldsymbol{\kappa}$ 为滑移面上与位错线垂直的单位矢量，于是

$$f_\perp = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\kappa} = e_{ikl} \kappa_i \tau_k b_m \sigma_{lm}^{(e)}$$

或

$$f_\perp = \nu_l \sigma_{lm}^{(e)} b_m \tag{28.5}$$

式中 $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\tau}$ 是滑移面的法矢量. 因为矢量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{\nu}$ 相互垂直，故可沿着它们选取两个坐标轴，并且我们发现力 $f_\perp$ 总共由张量 $\sigma_{lm}^{(e)}$ 的一个分量确定.

如果位错的位移不是发生在滑移面上，则 $\delta V \neq 0$. 这就意味着，切口岸边的位移将导致出现物质过剩(当一岸"侵入"另一岸时)或者物质缺失(当两岸之间分离成间缝时). 假如我们认为在位错运动过程中，介质的连续性不被破坏并且它的密度保持不变(精确到弹性形变)的话，上面所说的情况是不准许的. 在实际晶体中，消除过剩的物质或填补其不足是用扩散方式进行的(位错轴变为物质扩散流动的源或汇)[①]. 由扩散"治愈(焊合)"连续介质缺陷伴随产生的位错运动称为**攀移**.[②③]

综上所述，很明显，假定把位错的攀移作为它可能的虚位移，必须也像没有发生介质体积局部改变的滑移一样来计算. 这就意味着，必须由应变(28.2)减去重要的体积变化部分 $\frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}^{(\mathrm{pl})}$，亦即把塑性应变张量写成

$$\delta u_{ik}^{(\mathrm{pl})} = \left\{ \frac{1}{2} b_i (\delta \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\tau})_k + \frac{1}{2} b_k (\delta \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\tau})_i - \frac{1}{3} \delta_{ik} \boldsymbol{b} \cdot (\delta \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\tau}) \right\} \delta(\boldsymbol{\xi}). \tag{28.6}$$

对式(28.4)作相应的代换，得到作用在位错上之力的公式[④]：

$$f_i = e_{ikl} \tau_k b_m \left(\sigma_{lm}^{(e)} - \frac{1}{3} \delta_{lm} \sigma_{nn}^{(e)} \right) \tag{28.7}$$

---

① 例如，图 22 上表示的位错在 yz 平面上的运动，可以只用扩散使物质从"附加的"半平面离去.

② 因为这样的过程受扩散的限制，事实上只有在足够高的温度时它才能够起作用.

③ 简单地说，攀移是刃型位错离开滑移面的运动. ——译者注

④ 显然，晶体的各向均匀压缩不应导致力 $\boldsymbol{f}$ 的出现，表达式(28.7)具有这个性质.

(J. 魏特曼(Weertman),1965). 作用在整个位错环上的全部力为

$$F_i = e_{ikl} b_m \oint_D \left(\sigma_{lm}^{(e)} - \frac{1}{3} \delta_{lm} \sigma_{nn}^{(e)} \right) \mathrm{d}\, x_k. \tag{28.8}$$

它只有在非均匀应力场时不为零(当 $\sigma_{lm}^{(e)} = \text{const}$ 时,积分归结为$\oint \mathrm{d}\, x_k \equiv 0$). 如果沿着环的长度应力场的变化不大,则

$$F_i = e_{ikl} b_m \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\sigma_{lm}^{(e)} - \frac{1}{3} \delta_{lm} \sigma_{nn}^{(e)} \right) \oint_D x_p \mathrm{d}\, x_k$$

(假设位错环位于坐标原点附近). 进入式中的积分构成一个反称张量:

$$\oint x_p \mathrm{d}\, x_k = -\oint x_k \mathrm{d}\, x_p.$$

注意,通过在式(27.12)中引入的位错矩 d_{kl} 不难将力表示为①

$$F_i = d_{lm} \frac{\partial \sigma_{lm}^{(e)}}{\partial x_i} + \frac{1}{3} \left(d_{il} \frac{\partial \sigma_{nn}^{(e)}}{\partial x_l} - d_{ll} \frac{\partial \sigma_{nn}^{(e)}}{\partial x_i} \right). \tag{28.9}$$

在均匀应力场中,如已经指出那样,该力变为零. 但是,这时在环上作用的力矩为

$$K_i = e_{ilm} \oint x_l f_m \mathrm{d}\, l,$$

该式也可以通过位错矩表示:

$$K_i = e_{ikl} d_{km} \left(\sigma_{lm}^{(e)} - \frac{1}{3} \delta_{lm} \sigma_{nn}^{(e)} \right). \tag{28.10}$$

习 题

习题 1 试求两个平行螺型位错的相互作用力.

解:由第二个位错确立的应力场,作用在第一个位错单位长度上的力,借助于 §27 习题 2 的结果按公式(28.4)确定. 它是一个径向力,大小等于

$$f = \frac{\mu b_1 b_2}{2\pi r}.$$

两个位错同号($b_1 b_2 > 0$),两力相斥;异号($b_1 b_2 < 0$)相吸.

习题 2 试求作用在直线螺型位错上的力. 设该位错位于各向同性介质之自由表面的平行平面上.

解:设 yz 平面与物体表面重合,而位错与 z 轴平行并具有坐标 $x = x_0$, $y = 0$.

由位错和它在 yz 平面的镜面反射位错②合起来描述的介质自由表面保留的

---

① 在推导时利用了公式 $e_{ikl} e_{imn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}$ 和平衡方程 $\frac{\partial \sigma_{lm}^{(e)}}{\partial x_m} = 0$.

② 这是一个虚拟的位错,称为镜像位错. 由它取代自由表面,然后计算由这个虚拟位错作用在原来实位错上的力. 它的作用等同于自由表面对实位错的影响. ——译者注

应力场，就像它们处在无限介质中应力场一样：

$$\sigma_{xz} = -\frac{\mu b}{2\pi}\left[\frac{y}{(x-x_0)^2+y^2} - \frac{y}{(x+x_0)^2+y^2}\right],$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\mu b}{2\pi}\left[\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+y^2} - \frac{x+x_0}{(x+x_0)^2+y^2}\right].$$

这样的应力场在所研究位错上的作用力，等同于来自镜像方面的吸引力，亦即位错对于介质表面具有吸引力：

$$f = \frac{\mu b^2}{4\pi x_0}.$$

习题 3 试求在各向同性介质中位于平行滑移面的两个平行刃型位错的相互作用力.

解：设滑移面平行于 xz 平面，而 z 轴平行于位错线. 如同 §27 的习题 4 一样，假设 $\tau_z = -1, b_x = b$. 于是，弹性应力场 σ_{ik} 作用在位错单位长度上的力，具有分量

$$f_x = b\sigma_{xy}, \quad f_y = -b\sigma_{xx}.$$

在现在的情形下，σ_{ik} 由 §27 习题 4 求得的表达式确定. 如果一个位错与 z 轴重合，则它在第二个位错上，在 xy 平面上，通过 x, y 点作用的力，用极坐标表示的分量等于

$$f_r = \frac{b_1 b_2 B}{r}, \quad f_\varphi = \frac{b_1 b_2 B}{r}\sin 2\varphi, \quad B = \frac{\mu}{2\pi(1-\sigma)}.$$

力在滑移面上的分量等于

$$f_x = b_1 b_2 B\,\frac{\cos\varphi\cos 2\varphi}{r}.$$

当 $\varphi = \pi/2$ 和 $\varphi = \pi/4$ 时，力 f_x 变为零. 其中的第一个，当 $b_1 b_2 > 0$ 时对应于稳定平衡状态；第二个，当 $b_1 b_2 < 0$ 时对应于稳定平衡状态.

§29 位错的连续分布

如果在晶体中间同时存在许多位错，相隔的间距比较小（虽然远大于晶格常量[①]），则把它平均的来考虑是合理的. 换句话说，我们研究的是“物理上无限小”的有足够多位错线通过的晶体体积单元.

由方程(27.6)自然地推广可获得表示位错形变基本性质的方程. 我们现在

① 晶格常量是构成晶胞（保持整个晶格全部特性的最小晶格单元）棱边的三个平移矢量的长度.
——译者注

引入张量 ρ_{ik}(**位错密度张量**[①]),使其按跨越在任一回路 L 之曲面的积分等于该回路包围的所有位错线之伯格斯矢量之和 $\boldsymbol{b}$:

$$\int_{S_L} \rho_{ik} \mathrm{d} f_i = b_k. \tag{29.1}$$

连续函数 ρ_{ik} 描述了位错在晶体内的分布情况. 现在由该张量代替方程(27.6)右端的表达式:

$$e_{ilm} \frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l} = -\rho_{ik}. \tag{29.2}$$

由此方程显见,张量 ρ_{ik} 必须满足条件

$$\frac{\partial \rho_{ik}}{\partial x_i} = 0 \tag{29.3}$$

(在单一位错的情形下,这个条件本身就是表示沿位错线伯格斯矢量为常量).

在用这样的方法研究位错时,张量 w_{ik} 就是最初用来描述形变并按式(27.4)确定应变张量的量. 由式(27.2)定义的位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 与 w_{ik} 的关系,此时一般已不能采用(很明显,事实上,这样定义时,方程(29.2)的左端在晶体整个体积内将恒为零).

直到目前为止,我们一直假定位错是静止的. 现在来阐明,当位错在介质中按给定方式作运动时应如何建立能够在原则上确定弹性形变和应力的方程组[②].

方程(29.2)与位错是静止还是运动无关. 此时,如前所述,张量 w_{ik} 仍然是由弹性形变确定的量,它的对称部分是弹性应变张量,与应力张量的关系是通常形式的胡克定律.

但是,该方程现在还不足以对问题做出完全的描述. 完全的方程组必须同时也能够确定介质中各点的位移速度 $\boldsymbol{v}$.

然而,这时必须考虑到,位错运动除了引起弹性形变的变化外,同时还伴随有与发生的应力无关的晶体形状变化,即塑性形变. 正如我们已经指出的那样,位错运动的机理正是塑性形变(位错运动跟塑性形变的关系清楚地表示在图 25

---

① 位错密度张量 ρ_{ik} 是非对称张量,它的一般定义:$\rho_{ik} = \lim\limits_{\Delta f_i \to 0}\left(\dfrac{\Delta b_k}{\Delta f_i}\right) = \dfrac{\mathrm{d} b_k}{\mathrm{d} f_i}$,式中 Δf_i 是法线为 x_i 方向的面元. 不失一般性,可以认为各位错线都是分别平行于 x_1, x_2, x_3 轴的许多直线;Δb_j 是平行于 x_i 轴(因而垂直穿过面元 Δf_i)的所有位错的合成伯格斯矢量的第 j 个分量. ——译者注

② 这里,我们不去按对物体施加力来研究确定位错自身运动的问题,解决这个问题需要研究位错运动的微观机理和应当考虑在实际晶体中发生的各种缺陷的迟滞作用.

上：由于刃型位错由左向右推移，使滑移面以上部分的晶体移动了一个晶格周期，因为晶格仍然是正常的，所以晶体依旧是无应力的）. 与唯一由物体热力学状态确定的弹性形变相反，塑性形变是过程的函数. 在研究静止的位错时，没有出现关于区分弹性形变和塑性形变的问题，那时我们只对不取决于晶体以前历史的应力感兴趣.

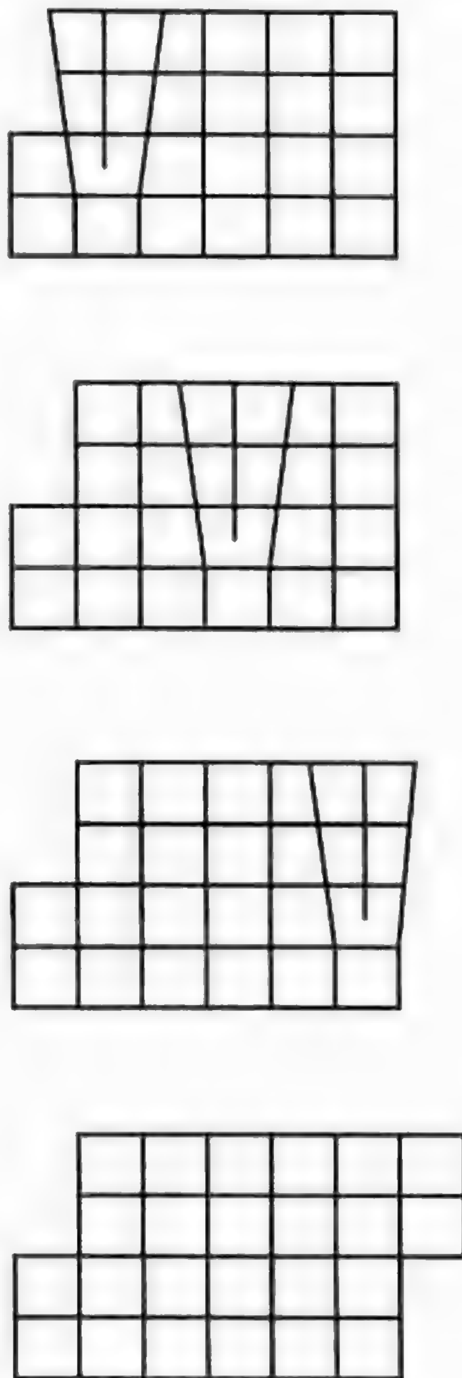


图 25

设 $\boldsymbol{u}$ 是介质中各点的几何位移矢量，假定它是从形变过程开始以前的位置算起的. 位移矢量对时间的导数 $\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{v}$. 如果利用矢量 $\boldsymbol{u}$ 形成"总畸变"张量 $W_{ik}=\partial u_k/\partial x_i$，并从 W_{ik} 减去"弹性畸变"张量（与在式（29.2）中出现的张量 w_{ik} 是一样的），则得到它的"塑性部分" $w_{ik}^{(pl)}$，我们引入记号

$$-j_{ik}=\frac{\partial w_{ik}^{(pl)}}{\partial t}, \tag{29.4}$$

量 j_{ik} 的对称部分确定了塑性应变张量变化的速度：在无限小时间间隔 δt 内 $u_{ik}^{(pl)}$ 的变化为

$$\delta u_{ik}^{(pl)}=-\frac{1}{2}(j_{ik}+j_{ki})\delta t \tag{29.5}$$

（E. 克劳内尔（Kröner），G. 里德尔（Rieder），1956）. 特别是，我们注意，假如塑性形变没有使物体的连续性发生破坏，则张量 j_{ik} 的迹等于零. 实际上，塑性形变没有使物体发生拉伸或压缩（它们总是与应力的产生相关联），亦即 $u_{kk}^{(pl)}=0$，因而 $j_{kk}=-\partial u_{kk}^{(pl)}/\partial t=0$.

将 $w_{ik}^{(pl)}=W_{ik}-w_{ik}$ 代入式（29.4），我们可将其写为

$$\frac{\partial w_{ik}}{\partial t}=\frac{\partial v_k}{\partial x_i}+j_{ik}, \tag{29.6}$$

该方程联系了弹性形变和塑性形变的变化速度. 在这里应把 j_{ik} 看作是已知的量，它必须保证满足方程（29.6）和（29.2）的协调条件. 这个条件可由式（29.2）对时间求导并代入式（29.6）得到，方程具有如下形式：

$$\frac{\partial \rho_{ik}}{\partial t}+e_{ilm}\frac{\partial j_{mk}}{\partial x_l}=0. \tag{29.7}$$

方程（29.2），（29.6）与下面的动力学方程一起共同组成描述带有位错运动之弹

性介质的完全方程组(科谢维奇(A. M. Косевич),1962):

$$\rho\dot{v}_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad \sigma_{ik} = \lambda_{iklm}u_{lm} = \lambda_{iklm}w_{lm} \tag{29.8}$$

在该方程中出现的描述位错分布和运动的张量 ρ_{ik} 和 j_{ik} 是坐标(和时间)的已知函数. 这两个函数必须满足方程(29.2)与(29.6)之间的由等式(29.3)和(29.7)表示的协调条件.

条件(29.7)可以看作是介质"伯格斯矢量守恒定律[①]"的微分表达式. 实际上,对方程(29.7)的两边按跨越在某闭合周线 L 上的曲面求积分,根据式(29.1)引入的由 L 线包围的位错之总伯格斯矢量 $\boldsymbol{b}$,并利用斯托克斯定理,我们得到

$$\frac{\mathrm{d}b_k}{\mathrm{d}t} = -\oint_L j_{ik}\mathrm{d}\,x_i \tag{29.9}$$

由该等式显见,它右边的积分给出每单位时间通过闭合周线 L"流过"的伯格斯矢量的大小,也就是由位错运动穿越 L 线而带走的伯格斯矢量. 因此,自然地把量 j_{ik} 称为**位错通量密度张量**.

显然,特别是在孤立位错环的情形,当位错位移时,根据表达式(28.2),对于塑性形变,张量 j_{ik} 具有如下形式:

$$j_{ik} = e_{ilm}\rho_{lk}V_m = e_{ilm}\tau_l V_m b_k \delta(\boldsymbol{\xi}), \tag{29.10}$$

式中 $\boldsymbol{V}$ 是位错线在其给定点上的速度. 此时,通过回路 L 之线元 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}$ 的通量矢 $(j_{ik}\mathrm{d}\,l_i)$ 正比于 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}\cdot(\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{\tau})$,即正比于速度 $\boldsymbol{V}$ 在既垂直于 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}$ 又垂直 $\boldsymbol{\tau}$ 的方向上的分量. 从几何上考虑这是明显的,因为只有速度的这个分量才能得出与位错线元 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}$ 相交的结果.

我们必须指出,张量(29.10)的迹正比于位错速度在位错滑移面法线方向上的分量. 如上所述,没有介质密度的非弹性变化是由 $j_{ii}=0$ 的条件保证的. 我们看到,对于孤立的位错,按照以前关于位错运动物理性质的描述,该条件就意味着是在滑移面上运动(见§28).

最后,我们研究在晶体中分布位错环的总伯格斯矢量(用 $\boldsymbol{B}$ 表示)等于零的情形[②]. 这个条件意味着,沿物体任一横截面积分

$$\int \rho_{ik}\mathrm{d}\,f_i = 0. \tag{29.11}$$

由此得出,在这种情形下位错密度可以表为

---

① 简单地说,伯格斯矢量守恒就是一条位错线或一个完整的位错环只有惟一的一个伯格斯矢量,它是此位错不变的特征. ——译者注

② 存在与晶体某些弯曲有关的位错,以夸张的形式表示在图 26 上. 条件 $\boldsymbol{B}=0$ 意味着整个晶体不存在宏观的弯曲.

$$\rho_{ik} = e_{ilm} \frac{\partial P_{mk}}{\partial x_l} \tag{29.12}$$

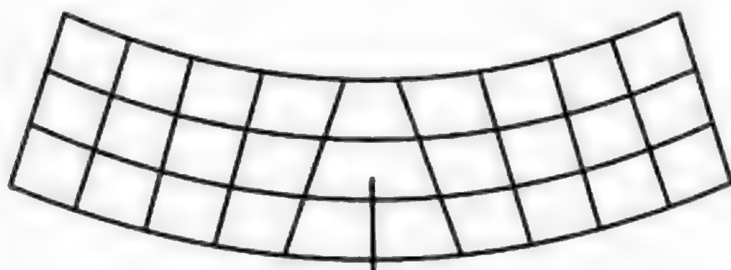


图 26

(科劳帕(F. Kroupa),1962). 于是,将积分式(29.11)变换为沿物体外部闭路周线的积分,并为零. 我们同时指出,表达式(29.12)自动满足条件(29.3).

显而易见,用这样方法定义的张量 P_{ik} 是形变晶体的**位错矩密度张量**(因此,自然地把它称为**位错极化张量**). 实际上,按定义,晶体的总位错矩 D_{ik} 等于

$$D_{ik} = \sum S_i b_k = \frac{1}{2} e_{ilm} \sum b_k \oint_D x_l \mathrm{d}\, x_m = \frac{1}{2} \int e_{ilm} x_l \rho_{mk} \mathrm{d}\, V,$$

式中的求和是按全部位错环进行的,而积分是按晶体整个体积进行的. 将式(29.12)代入上式,有

$$D_{ik} = \frac{1}{2} \int e_{ilm} e_{mpq} x_l \frac{\partial P_{qk}}{\partial x_p} \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int x_m \left(\frac{\partial P_{mk}}{\partial x_i} - \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_m} \right) \mathrm{d}V,$$

对等式右边积分中的每一项进行分部积分后得到

$$D_{ik} = \int P_{ik} \mathrm{d}V. \tag{29.13}$$

根据式

$$j_{ik} = -\frac{\partial P_{ik}}{\partial t}, \tag{29.14}$$

位错环密度也可以通过张量 P_{ik} 表示. 例如,不难确信,利用表达式(29.10) 对物体任意一部分体积计算积分 $\int j_{ik} \mathrm{d}\, V$ 是存在于该体积内的所有位错环的总和. 注意,表达式(29.14) 与(29.12) 一起自动的满足条件(29.7).

比较式(29.14)和(29.4),我们发现 $\delta w_{ik}^{(\mathrm{pl})} = \delta P_{ik}$. 如果我们约定,认为 $P_{ik} = 0$ 时是没有塑性形变的状态,则将有 $w_{ik}^{(\mathrm{pl})} = P_{ik}$,意思是,全部形变过程是在 $\boldsymbol{B} = 0$ 的情形下发生的. 我们必须强调指出,张量 P_{ik} 和 $w_{ik}^{(\mathrm{pl})}$ 之间存在原则性的区别:P_{ik} 是物体的状态函数,张量 $w_{ik}^{(\mathrm{pl})}$ 不是状态函数,而依赖于物体进入该状态的过程. 在这些条件下,我们有

$$w_{ik} = W_{ik} - w_{ik}^{(\mathrm{pl})} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - P_{ik}, \tag{29.15}$$

式中 u_k 仍表示离开未形变状态位置的总几何位移矢量. 此时,方程(29.6)恒被满足,而动力学方程(29.8)具有如下形式:

$$\rho \ddot{u}_i - \lambda_{iklm}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} = -\lambda_{iklm}\frac{\partial P_{lm}}{\partial x_k}, \tag{29.16}$$

这样一来,就将确定具有 $\boldsymbol{B}=0$ 的位错运动产生的弹性形变问题,归结为具有沿晶体分布体力密度为 $-\lambda_{iklm}\partial P_{lm}/\partial x_k$ 的通常弹性理论问题.

§30 相互作用位错的分布

现在我们来考查在同一个滑移面上分布大量彼此平行的同一种直线位错的总合情形,并导出确定其平衡分布的方程. 设 z 轴与位错平行,而 xz 平面与滑移面重合.

为了明确起见,我们假定位错的伯格斯矢量的方向沿着 x 轴. 这时,在滑移面内单位长度位错上作用的力等于 $b\sigma_{xy}$,其中 σ_{xy} 是位错所在点的应力.

由一个直线位错产生(并作用在另一个位错上)的应力,与离开它的距离成反比减小. 因此,位错点 x 在 x'点产生的应力为 $bD/(x-x')$,其中 D 是晶体弹性模量数量级的常量. 可以证明,常量 $D>0$,亦即在同一个滑移面上两个相同的位错彼此相斥(对于各向同性介质,这已在§28 的习题 3 中证明).

用 $\rho(x)$ 表示在 x 轴的区间 (a_1,a_2) 上的线位错密度,$\rho(x)\mathrm{d}x$ 就是通过 $\mathrm{d}x$ 区间各点位错的伯格斯矢量之和. 因此,全部位错在 x 轴的 x 点产生的总应力,可写为积分形式

$$\sigma_{xy} = -D\int_{a_1}^{a_2}\frac{\rho(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - x}. \tag{30.1}$$

对于在区间 (a_1,a_2) 内部的点,必须将该积分理解为取主值,以便消除位错本身毫无实际意义的影响.

如果在晶体中同时存在由已知外荷载产生的平面(在 xy 平面上)应力场 $\sigma_{xy}^{(e)}(x,y)$,则每一个位错都将处于力 $b(\sigma_{xy}+p(x))$ 的作用之下,其中,为简便起见,我们记 $p(x)=\sigma_{xy}^{(e)}(x,0)$. 平衡条件是这个力为零:$\sigma_{xy}+p=0$,即

$$\mathrm{P}\int_{a_1}^{a_2}\frac{\rho(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - x} = \frac{p(x)}{D} \equiv \omega(x), \tag{30.2}$$

式中在积分号前面紧挨着积分号的 P 在本章中表示积分时取主值. 该式就是确定 $\rho(x)$ 平衡分布的积分方程. 它属于具有柯西核型的奇异积分方程.

这类方程的解归结为用如下方法表述的复变函数理论问题.

用 $\Omega(z)$ 表示由全复平面 z(沿区间 (a_1,a_2) 具有切口)定义的函数为积分

$$\Omega(z) = \int_{a_1}^{a_2}\frac{\rho(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - z}. \tag{30.3}$$

通过 $\Omega^+(x)$ 和 $\Omega^-(x)$ 表示该函数在切口上岸和下岸的极限值. 它们等于同样的积分,就是沿着区间(a_1,a_2)相应地从下面或上面的无限小半圆周绕过 $z=x$ 点求的积分,表示为

$$\Omega^{\pm}(x) = \mathrm{P}\int_{a_1}^{a_2}\frac{\rho(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi}{\xi - x} \pm \mathrm{i}\pi\rho(x). \tag{30.4}$$

如果 $\rho(\xi)$ 满足方程(30.2),则积分的主值等于 $\omega(x)$,所以有

$$\Omega^+(x) + \Omega^-(x) = 2\omega(x), \tag{30.5}$$

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = 2\mathrm{i}\pi\rho(x). \tag{30.6}$$

这样一来,关于求解方程(30.2)的问题,就等价于寻求具有式(30.5)性质的解析函数 $\Omega(z)$,然后按式(30.6)确定 $\rho(x)$ 的问题. 在这种情形下,所研究问题的物理条件要求 $\Omega(\infty)=0$,这可由远离这组位错($x\to\pm\infty$)时应力 σ_{xy} 必须变为零(根据式(30.3)的定义,在区间(a_1,a_2)之外 $\sigma_{xy}(x) = -D\Omega(x)$)得到.

现在我们首先考虑不存在外应力($p(x)\equiv 0$)的情形,而在(a_1,a_2)区间的两端,位错被某障碍物(晶格缺陷)抑制. 当 $\omega(x)=0$ 时,由式(30.5)有 $\Omega^+(x) = -\Omega^-(x)$,亦即,当绕过 a_1, a_2 中的每一点时,函数 $\Omega(z)$ 必须改变符号. 满足该条件的任一函数为如下形式:

$$\Omega(z) = \frac{P(z)}{\sqrt{(a_2-z)(z-a_1)}}, \tag{30.7}$$

式中 $P(z)$ 是多项式. 规定 $\Omega(\infty)=0$ 时,取 $P(z)=1$(精确到常系数),以使

$$\Omega(z) = \frac{1}{\sqrt{(a_2-z)(z-a_1)}}. \tag{30.8}$$

按照式(30.6),未知函数 $\rho(x)$ 也将具有这样的形式,其系数根据下面的条件确定:

$$\int_{a_1}^{a_2}\rho(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi = B \tag{30.9}$$

(式中 B 是所有位错的伯格斯矢量之和),于是我们得到

$$\rho(x) = \frac{B}{\pi\sqrt{(a_2-x)(x-a_1)}}. \tag{30.10}$$

由此可见,位错朝区间两端障碍物(区间的边缘)方向塞积,具有的密度与到障碍物之距离的平方根成反比. 按此规律,当趋近 a_1 或 a_2 时,在区间(a_1,a_2)外边的应力增加,例如,当 $x>a_2$ 时

$$\sigma_{xy} \approx \frac{BD}{\sqrt{(x-a_2)(a_2-a_1)}}.$$

换句话说,边界附近的位错集中在边界的另一面同样也引起应力集中.

现在我们设想,在同样的条件下(障碍物在给定区间(a_1,a_2)的两端),同时

还具有外应力场 $p(x)$. 通过 $\Omega_0(z)$ 表示形如式(30.7)的函数,并重新写出等式(30.5),将其除以 $\Omega_0^+ = -\Omega_0^-$ 后,得到

$$\frac{\Omega^+(x)}{\Omega_0^+(x)} - \frac{\Omega^-(x)}{\Omega_0^-(x)} = \frac{2\omega(x)}{\Omega_0^+(x)}.$$

将该等式与式(30.6)相比较,得出如下结论:

$$\frac{\Omega(z)}{\Omega_0(z)} = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)}{\Omega_0^+(\xi)} \frac{\mathrm{d}\,\xi}{\xi - z} + \mathrm{i}\pi P(z), \tag{30.11}$$

式中 $P(z)$ 是多项式. 取函数(30.8)作为 $\Omega_0(z)$,并置 $P(z) = C$(C 是常数),我们得到满足条件 $\Omega(\infty) = 0$ 的解. 由此,按公式(30.6)求出未知函数 $\rho(x)$:

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{(a_2 - x)(x - a_1)}}\mathrm{P}\int_{a_1}^{a_2} \omega(\xi)\sqrt{(a_2 - \xi)(\xi - a_1)}\,\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\xi - x} + \\ + \frac{C}{\sqrt{(a_2 - x)(x - a_1)}}. \tag{30.12}$$

由条件(30.9)确定常数 C. 在这里,当 $x \to a_2$(或 $x \to a_1$)时,$\rho(x)$ 按 $(a_2 - x)^{-1/2}$ 规律增加. 而在障碍物的另一面同样也产生应力集中.

如果仅仅在一面(比如说,在 a_2 点)存在障碍物,则在所有的 $x < a_2$ 的点,除了 $x = a_1$ 的点外,未知解必须满足应力有限性的条件. 此时,最后一点自身的位置是预先不知道的,它必须在求解问题的结果中确定. 这就是说,在 $\Omega(z)$ 项中,$\Omega(a_1)$ 必须是有限的. 这样的函数(同时也满足 $\Omega(\infty) = 0$ 的条件)同样可由公式(30.11)得到,只需将 $\Omega_0(z)$ 选作

$$\Omega_0(z) = \sqrt{\frac{z - a_1}{a_2 - z}},$$

该函数也属于式(30.7)的形式,在(30.11)中,置 $P(z) = 0$,结果得到

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{x - a_1}{a_2 - x}}\mathrm{P}\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{\frac{a_2 - \xi}{\xi - a_1}}\,\frac{\omega(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi}{\xi - x}. \tag{30.13}$$

当 $x \to a_1$ 时,$\rho(x)$ 像 $\sqrt{x - a_1}$ 一样变为零. 在点 a_1 的另一面,总应力 $\sigma_{xy}(x) + p(x)$ 也按同样的规律趋于零.

最后,设在区间 (a_1, a_2) 的两端不存在障碍物,并且位错只受到外应力 $p(x)$ 的抑制. 这时,对应的 $\Omega(z)$ 可在式(30.11)中置下式得到:

$$\Omega_0(z) = \sqrt{(a_2 - z)(z - a_1)}, \quad P(z) = 0.$$

但是,$\Omega(\infty) = 0$ 的条件此时要求遵守补充条件:在(30.11)中,对 $z \to \infty$ 取极限时,得到

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(a_2-\xi)(\xi-a_1)}} = 0. \tag{30.14}$$

未知函数 $\rho(x)$ 由下式给出：

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{(a_2-x)(x-a_1)}\,\mathrm{P}\int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)}{\sqrt{(a_2-\xi)(\xi-a_1)}}\frac{d\xi}{\xi-x}, \tag{30.15}$$

而在区间 (a_1,a_2) 两端点 a_1 和 a_2 的坐标由条件(30.9)和(30.14)确定.

习 题

习题 试求在均匀应力场($p(x)=p_0$)中，在一端或两端有障碍物时位错在区间上的分布.

解：在一端(a_2)有障碍物的情形，计算积分(30.13)给出

$$\rho(x) = \frac{p_0}{\pi D}\sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-x}}.$$

由条件(30.9)确定位错分布区间的长度：$a_2-a_1=2BD/p_0$. 在离开它的另外一面，障碍物附近应力集中的规律为

$$\sigma_{xy} \approx p_0\sqrt{\frac{a_2-a_1}{x-a_2}}.$$

在有两个障碍物限制的区间(长度为 $2L$)的情形，x 的原点取在它的中点，按式(30.12)求得

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{L^2-x^2}}\left(\frac{p_0}{D}x+B\right).$$

第五章

固体的热传导和黏性

§31　固体中的热传导方程

固体介质在非均匀加热时不能导致像通常在流体中那样发生对流. 因此,在这里,热量的传递只有**热传导**一种方式. 因而,在固体中描述的传热过程与在流体中描述复杂的对流过程相比较,方程更为简单.

在固体介质中,热传导方程可以直接从以热量连续性方程形式表示的能量守恒定律导出. 在单位时间内物体单位体积所吸收的热量等于 $T\partial S/\partial t$(其中 S 表示单位体积的**熵**),它应等于 $-\nabla\cdot\boldsymbol{q}$,其中 $\boldsymbol{q}$ 是**热流密度**(矢量). 实际上,这个量总是正比于温度的梯度的,亦即可以写为 $\boldsymbol{q}=-\kappa\nabla T$ 形式①(κ 为**热导率**②). 于是

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=\nabla\cdot(\kappa\nabla T). \tag{31.1}$$

根据公式(6.4)熵可以写为

$$S=S_0(T)+K\alpha u_{ii},$$

式中 α 是热膨胀系数; S_0 是物体未形变状态的熵. 我们依旧假设在物体内具有足够小的温度差,以致可以认为像 κ 和 α 等这样的量都是常量. 这时,将写出的关于 S 的表达式代入方程(31.1)后,则变为

$$T\frac{\partial S_0}{\partial t}+\alpha KT\frac{\partial u_{ii}}{\partial t}=\kappa\nabla^2 T.$$

按照熟知的热力学公式,有

---

① 该式即是热传导的基本定律——傅里叶(Fourier)热传导定律. 这里假定在小弹性形变时该定律仍成立. ——译者注

② 在力学界常称为热传导系数或导热系数. ——译者注

$$C_p - C_v = K\alpha^2 T.$$

S_0 的导数可以写为

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{C_v}{T}\frac{\partial T}{\partial t}$$

($\partial S_0/\partial t$ 是在 $u_{ii} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$,即体积不变条件下取的导数).

最后得到如下形式的热传导方程:

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_p - C_v}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \kappa \nabla^2 T. \tag{31.2}$$

为了得到完备的方程组,还必须把确定被加热物体的非均匀形变的方程组组合到这里来. 这组方程就是平衡方程(7.8):

$$2(1-\sigma)\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{u} - (1-2\sigma)\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} = \frac{2\alpha(1+\sigma)}{3}\nabla T. \tag{31.3}$$

原则上,方程(31.3)能够在任意给定温度分布的情形下确定物体的形变. 将这样得到的$\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ 的表达式代入方程(31.2)中,即导出确定温度分布的方程,在这里未知函数只有一个 $T(x,y,z,t)$.

例如,我们考虑在无限固体介质中的热传导,使其温度分布仅仅满足一个条件:在无限远处温度趋于固定的极限值 T_0 而且没有形变. 在这样条件下,由方程(31.3)导出$\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ 与 T 之间有如下关系(见§7 的习题 8):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\alpha(T - T_0).$$

将该表达式代入(31.2),得到方程

$$\frac{(1+\sigma)C_p + 2(1-2\sigma)C_v}{3(1-\sigma)}\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T, \tag{31.4}$$

该方程属于热传导方程比较简单的类型.

这类方程还可以用来描述温度沿细直杆长度分布的问题(如果杆件的一端或两端是自由的). 在杆的任一横截面上的温度分布可以认为是常量,因此,沿着杆长温度 T 只是坐标 x(和时间)的函数. 这种杆的热膨胀仅仅导致长度的改变,而不会改变其直线形状,也不会在杆内产生应力. 因此,很明显,在一般方程(31.1)中的$\partial S/\partial t$ 应在固定压力时取导数,而由于$(\partial S/\partial t)_p = C_p/T$,所以温度分布可以用下面的一维热传导方程来描述:

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

但是必须指出,用简单的热传导方程实际上总可以足够精确地确定固体中的温度分布. 事实上,方程(31.2)左边的第二项与第一项比较是$(C_p - C_v)/C_v$ 数量级的修正项. 可是,在固体不同热容量之间的差值通常都很小,如果忽略它,则固体的热传导方程总可以写为

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\chi\nabla^2 T, \tag{31.5}$$

式中χ是**温度传导率**[①],定义为**热导率**κ与单位体积的某种平均热容量C之比,即$\chi=\kappa/C$.

§32 晶体的热传导

一般来说,在各向异性物体中,热流$\boldsymbol{q}$的方向与温度梯度的方向是不相同的. 因此在晶体中,$\boldsymbol{q}$与温度梯度之间的关系式$\boldsymbol{q}=-\kappa\nabla T$必须代以更一般的关系式:

$$q_i=-\kappa_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_k}. \tag{32.1}$$

二阶张量κ_{ik}称为晶体的**热导率张量**. 对应于这一关系,热传导方程(31.5)也同样具有更一般的形式

$$C\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa_{ik}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\partial x_k}. \tag{32.2}$$

热导率张量是对称张量:

$$\kappa_{ik}=\kappa_{ki}. \tag{32.3}$$

这一论断是动理系数对称原理的一个推论(参见第五卷, §120),现在我们来证明.

由于热量传递是不可逆过程,物体总熵的增加速度为

$$\dot{S}_{tot}=-\int\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{q}}{T}\mathrm{d}V=-\int\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{q}}{T}\mathrm{d}V+\int\boldsymbol{q}\cdot\nabla\frac{1}{T}\mathrm{d}V.$$

当化为面积分时,第一个积分消失了. 于是,我们得到

$$\dot{S}_{tot}=\int\boldsymbol{q}\cdot\nabla\frac{1}{T}\mathrm{d}V=-\int\frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla T}{T^2}\mathrm{d}V.$$

或

$$\dot{S}_{tot}=-\int\frac{1}{T^2}q_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\mathrm{d}V. \tag{32.4}$$

按照动理系数的一般定义[②],我们可以根据式(32.4)进行推导,在现在的情形下,在关系式

$$q_i=-T^2\kappa_{ik}\left(\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)$$

中的系数是$T^2\kappa_{ik}$. 因此,由动理系数的对称性可以直接得到所求的关系式

---

① 力学界常称为热扩散率、热扩散系数或导温系数. ——译者注

② 这里采用的定义是在第六卷 §59 给出的形式.

(32.3).

二次型

$$-q_i\frac{\partial T}{\partial x_i}=\kappa_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k}$$

必须是正的,因为式(32.4)中熵对时间的导数必须为正. 众所周知,二次型正定性条件是它的系数行列式主值为正. 因此,热导率张量 κ_{ik} 的所有主值总是正的. 其实,单纯从热流方向来考虑这一结果也是显然的.

张量 κ_{ik} 不同独立分量的个数取决于晶体的对称性. 因为张量 κ_{ik} 是对称的,其不同独立分量的个数与二阶对称张量 α_{ik}(热膨胀系数张量,见 §10)相同.

§33 固体的黏性

到目前为止,在研究弹性体内部的运动时,我们一直认为形变过程是以可逆方式进行的. 实际上,可逆的热力学过程只有在具有无限小的速度时才会发生,因为在每一个给定的瞬间,在物体内部都来得及建立热力学平衡状态. 但是,真实的运动是在有限速度下发生的,物体不能在每一个给定的瞬间都处于热力学平衡状态,因此在物体内部将发生使其趋于平衡状态的过程. 这一过程的存在导致了运动的不可逆性,特别是机械能①的**耗散**,最终转变为热量.

能量的耗散是由下面两类过程引起的:第一,当物体内部各处温度不相同时,使物体发生不可逆的热传导过程;第二,如果在物体内部发生某种内部运动,则由于运动速度的有限性导致发生不可逆过程. 这个能量耗散过程可以像在流体中那样称为**内摩擦**过程或**黏滞**过程.

在大多数情形下,物体内部宏观运动的速度是如此的小,以致能量的耗散是无关紧要的. 这样"近于可逆的"的过程能够借助于所谓的**耗散函数**来描述(参见第五卷,§121).

就是说,如果某机械系统的运动伴随能量耗散,则仍可以利用通常的运动方程来描述该系统的运动,这时只需在作用于系统的力上增加一个是速度线性函数的所谓**耗散力**或**摩擦力**即可. 这个力能够表示为某个称为耗散函数的 R(是速度的二次函数)对速度的导数形式. 于是,相对于系统任一广义坐标 q_a 的摩擦力 f_a 具有如下形式:

$$f_a=-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_a}.$$

耗散函数本质上是速度 $\dot{q}_a$ 的正二次型. 上式的等价关系式是

$$\delta R=-\sum_a f_a\delta\dot{q}_a, \tag{33.1}$$

① 在这里,机械能指的是在弹性体内部宏观运动的动能与其因形变引起的(弹性)势能之和.

式中 δR 表示速度无限小变化时耗散函数的变化. 同样可以证明,单位时间内系统机械能的减小是由耗散函数的两倍($2R$)确定的.

不难把关系式(33.1)推广到在连续体内部带有摩擦运动的情形. 在这种情形下,系统的状态由连续的广义坐标确定. 这些坐标就是在物体上每一个给定点上的位移矢量 $\boldsymbol{u}$. 因而,应当把关系式(33.1)改写为积分形式

$$\delta\int R\mathrm{d}V = -\int f_i\delta v_i\mathrm{d}V, \tag{33.2}$$

式中 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{f}$ 是作用于物体每单位体积上的耗散力; 在整个物体上的总耗散函数写为 $\int R\mathrm{d}V$, 其中 R 是相对于物体单位体积的耗散函数.

现在来确定形变体耗散函数 R 的一般形式. 函数 R 是描述内摩擦的,因此如果在物体中没有内部运动,特别是如果物体只做整体移动或转动时,函数 R 须等于零. 换句话说,当 $\boldsymbol{v}=\text{const}$ 时和当 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ 时,耗散函数应等于零. 这就意味着,R 应与速度本身无关,而与速度的梯度有关,并且它只能是包含这样导数的组合,即在 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ 时,它等于零. 这样的组合就是和式(即应变张量对时间的导数①):

$$v_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right).$$

这样一来,耗散函数就必须是 v_{ik} 的二次函数. 此类函数的最一般形式为

$$R=\frac{1}{2}\eta_{iklm}v_{ik}v_{lm}, \tag{33.3}$$

式中的四阶张量 η_{iklm} 可以称为**黏度张量**. 该张量具有如下明显的对称性质②:

$$\eta_{iklm}=\eta_{lmik}=\eta_{kilm}=\eta_{ikml}. \tag{33.4}$$

表达式(33.3)类似于晶体自由能表达式(10.1),只是现在式中以 η_{iklm} 代替了弹性模量张量 λ_{iklm},以张量 v_{ik} 代替了张量 u_{ik}. 所以,在§10中对于具有各类对称性的晶体所得到的一切关于张量 λ_{iklm} 的结果也完全适用于张量 η_{iklm}.

特别是,在各向同性物体中,张量 η_{iklm} 总共只有两个独立分量,并且 R 可以写为类似于表达式(4.3)对于各向同性物体弹性能的形式:

$$R=\eta\left(v_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}v_{ll}\right)^2+\frac{\zeta}{2}v_{ll}^2, \tag{33.5}$$

式中 η 和 ζ 是两个**黏性系数**. 因为 R 本质上是正函数,所以系数 η 和 ζ 也必须是正值.

---

① 类似关于黏性流体的讨论,参见第六卷§15,并比较之.

② 注意,耗散函数的存在是**昂萨格**(Onsager)**动理系数**对称原理的结果. 正是这个原理导致了式(33.4)的第一个等式(关于线性关系(33.7)的系数的)和二次型(33.3)存在的等价事实. 这将根据§41中类似的结论直接证明.

关系式(33.2)类似于对弹性自由能建立的关系式

$$\delta\int F\mathrm{d}V = -\int F_i\delta u_i\mathrm{d}V,$$

式中 $F_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ 是作用于物体单位体积上的力. 因此,通过张量 v_{ik} 表示耗散力 f_i 的表达式就像用 u_{ik} 表示 F_i 的表达式一样,可以直接写为:

$$f_i = \frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \tag{33.6}$$

式中的**耗散应力张量** σ'_{ik} 利用下式确定:

$$\sigma'_{ik} = \frac{\partial R}{\partial v_{ik}} = \eta_{iklm}v_{lm}. \tag{33.7}$$

因此,如在运动方程中考虑黏性,可以用简单的方法来实现,即在这些方程中用和式 $\sigma_{ik}+\sigma'_{ik}$ 来代替应力张量 σ_{ik}.

在各向同性物体中

$$\sigma'_{ik} = 2\eta\left(v_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}v_{ll}\right) + \zeta v_{ll}\delta_{ik}. \tag{33.8}$$

自然,这个表达式在形式上跟流体的**黏性应力张量**表达式是一样的.

§34 固体中声的吸收

固体中的**声吸收系数**,可以完全类似地像对流体那样进行计算(参见第六卷,§79). 在这里,我们对各向同性物体进行相应地计算.

物体中机械能的耗散由下面的和式给出:

$$\dot{E}_{\mathrm{mech}} = -\frac{\kappa}{T}\int(\nabla T)^2\mathrm{d}V - 2\int R\mathrm{d}V,$$

式中,第一项是由热传导决定的;而第二项是由黏性决定的. 因而,利用表达式(33.5)后,我们有公式

$$\dot{E}_{\mathrm{mech}} = -\frac{\kappa}{T}\int(\nabla T)^2\mathrm{d}V - 2\eta\iint\left(v_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}v_{ll}\right)^2\mathrm{d}V - \zeta\int v_{ll}^2\mathrm{d}V. \tag{34.1}$$

为了计算温度梯度,在第一次近似中,我们利用绝热时的声振动. 借助于熵的表达式(6.4)将绝热条件写为

$$S_0(T) + K\alpha u_{ll} = S_0(T_0),$$

式中 T_0 是物体未形变状态的温度. 将差 $S_0(T)-S_0(T_0)$ 展为 $T-T_0$ 的幂级数,精确到一次项时,我们有

$$S_0(T) - S_0(T_0) = (T-T_0)\frac{\partial S_0}{\partial T_0} = \frac{C_v}{T_0}(T-T_0)$$

(熵的导数是在 $u_{ii}=0$ 即体积不变情形下取的). 于是有

$$T - T_0 = -\frac{T\alpha K}{C_v}u_{ii}.$$

再利用关系式

$$K \equiv K_{\text{iso}} = \frac{C_v}{C_p} K_{\text{ad}}, \quad \frac{K_{\text{ad}}}{\rho} = c_l^2 - \frac{4}{3} c_t^2,$$

即将上面的表达式改写为

$$T - T_0 = -\frac{T\alpha\rho}{C_p}\left(c_l^2 - \frac{4}{3}c_t^2\right)u_{ii}. \tag{34.2}$$

首先,我们来看横向弹性波的吸收问题. 热传导一般不会引起这种波的吸收(在所研究的近似程度内). 实际上,在横波中,$u_{ii}=0$. 因此,根据式(34.2),其中的温度是不变的. 特别是,假设选取波的传播方向为 x 轴时

$$u_x = 0, \quad u_y = u_{0y}\cos(kx - \omega t), \quad u_z = u_{0z}\cos(kx - \omega t),$$

而不为零的应变张量只有

$$u_{xy} = -\frac{u_{0y}k}{2}\sin(kx - \omega t), \quad u_{xz} = -\frac{u_{0z}k}{2}\sin(kx - \omega t).$$

物体单位体积的耗散能按时间的平均值可由式(34.1)得到:

$$\bar{\dot{E}}_{\text{mech}} = -\frac{\eta\omega^4}{2c_t^2}(u_{0y}^2 + u_{0z}^2),$$

式中我们已置 $k=\omega/c_t$. 波的总平均能量等于平均动能的二倍,我们得到该量在单位体积上的值:

$$\bar{E} = \rho\bar{\dot{\boldsymbol{u}}}^2 = \frac{\rho\omega^2}{2}(u_{0y}^2 + u_{0z}^2).$$

声吸收系数定义为波的平均耗散能与二倍平均能流之比. 该值确定了波幅随距离的变化规律,即与 $e^{-\gamma x}$ 成比例地减小. 这样一来,我们就求出了横波吸收系数的如下表达式:

$$\gamma_t = \frac{|\bar{\dot{E}}_{\text{mech}}|}{2c_t\bar{E}} = \frac{\eta\omega^2}{2\rho c_t^3}. \tag{34.3}$$

在纵向声波时,$u_x = u_0\cos(kx - \omega t)$, $u_y = u_z = 0$. 借助于公式(34.1)和(34.2)进行类似地计算,最后得到:

$$\gamma_l = \frac{\omega^2}{2\rho c_l^3}\left[\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) + \frac{\kappa T\alpha^2\rho^2c_l^2}{C_p^2}\left(1 - \frac{4c_t^2}{3c_l^2}\right)^2\right]. \tag{34.4}$$

严格地说,这些公式只适合于完全各向同性的非晶物体. 但是,它们同样可以用来在数量级方面确定各向异性的单晶体的声吸收规律.

在多晶体中,声吸收显现出特殊的性质. 如果声波波长 λ 远小于单个晶体的尺寸 a,则在每一个晶体中,声被吸收的情形,也像在大晶体那样被吸收,并且吸收系数正比于 ω^2.

而如果 $\lambda \gg a$,则吸收的性质就变了. 在这种波中,可以认为每一个晶体都

受到了均匀分布压力的作用. 但是由于晶体和在其接触面上边界条件的各向异性,故此时产生的形变是非均匀的. 在晶体尺寸的长度上,它发生了相当大的变化(相当于本身同样数量级的变化),而在波长的长度上没有变化,就和在均匀物体中一样. 对于声吸收来说,形变的变化速度和发生的温度梯度都是很重要的. 其中的第一个仍然是通常的数量级,而在每个晶体的范围内温度梯度都异常的大. 因此,由热传导所决定的声吸收要比与黏性有关的声吸收大得多,所以只需计算前者就足够了.

我们考虑两种不同的极限情形. 在数量级为 a 的距离上,由热传导使温度均匀化的时间(热传导的弛豫时间①)是 a^2/χ 的数量级. 首先我们假设 $\omega \ll \chi/a^2$,这就是说,弛豫时间比波的振动周期要小. 因此,在每个晶体的范围内,在很大程度上来得及建立热量的平衡,在这里我们遇到的几乎是等温振动.

设 T' 是发生在晶体内的温差,而 T'_0 是在绝热过程时发生的温差. 由热传导而散出的热量(在单位体积上)为

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{q}=\kappa\,\nabla^2T'\sim\frac{\kappa T'}{a^2}.$$

在形变时产生的热量的数量级是 $\dot{T}'_0C\sim\omega T'_0C$($C$ 是热容量). 使这两个表达式相等,得到

$$T'\sim T'_0\frac{\omega a^2}{\chi}.$$

在晶体尺寸的范围内,温度变化的数量级是 T',因而,温度梯度的数量级是 T'/a,最后,由式(34.2)求出 T'_0,此时应在式中置 $u_{ii}\sim ku\sim u\omega/c$($u$ 是位移矢量的振幅):

$$T'_0\sim\frac{T\alpha\rho c\omega}{C}u \tag{34.5}$$

(自然,估计数量级时,我们没有区分不同的声速 c). 借助于这些结果,我们可以计算单位体积的耗散的能量:

$$\bar{\dot{E}}_{\text{mech}}\sim\frac{\kappa}{T}(\nabla T)^2\sim\frac{\kappa}{T}\left(\frac{T'}{a}\right)^2,$$

将其除以能流 $c\bar{E}\sim c\rho\omega^2u^2$,则得到所要求的阻尼系数

$$\gamma\sim\frac{T\alpha^2\rho ca^2}{\chi C}\omega^2\quad\left(\text{当 }\omega\ll\frac{\chi}{a^2}\text{时}\right) \tag{34.6}$$

(C. Zener,1938). 将该表达式与通常的表达式(34.3)和(34.4)比较,我们可以说,在所研究的情形下,发生在多晶物体的声吸收就如同它具有下面的黏性系

---

① 描述一个系统(或物体)的某自变量发生突然改变时,因变量从一个平衡状态逐渐改变到另一个平衡状态的现象称为弛豫,这一过程所经历的时间称为弛豫时间. ——译者注

数一样：

$$\eta \sim \frac{T\alpha^2\rho^2c^4a^2}{\chi C},$$

但是远比组成它的晶体的黏性系数要大得多.

其次，我们来研究一种特殊极限情形，即 $\omega >> \chi/a^2$ 的情形. 换句话说，弛豫时间远大于波的振动周期. 因而，由于形变产生的温度差，在每一个周期的时间间隔内还来不及进行调整使其均衡. 但是，我们不能认为，确定声吸收的温度梯度是 T'_0/a 的数量级，从而就只去考虑每个晶体内部的热传导过程. 在现在的情形下，它们之间起主要作用的应该是相邻晶体之间的热交换（伊萨科维奇（M. A. Исакович），1948）. 如果晶体之间彼此是绝热的，则在它们之间的界面上就会形成数量级为 T'_0 的温度差，也就是各单个晶体范围内的温度差. 实际上，当通过晶体之间的接触面时，边界条件要求温度连续，因而就出现了从界面向晶体内部"传播"的"温度波"，这些波在距离

$$\delta \sim \left(\frac{\chi}{\omega}\right)^{1/2}.$$

上出现衰减①. 在所研究的情形中 $\delta << a$，即基本的温度梯度是 T'_0/δ 的数量级，并且发生在比晶体的一般尺寸小的距离上. 对应的晶体的部分体积 $\sim a^2\delta$，取其对晶体总体积 $\sim a^3$ 的比，我们求出平均耗散的能量：

$$\bar{\dot{E}}_{\text{mech}} \sim \frac{\kappa}{T}\left(\frac{T'_0}{\delta}\right)^2\frac{a^2\delta}{a^3} \approx \frac{\kappa T'^2_0}{Ta\delta}.$$

用表达式(34.5)代替式中的 T'_0，并除以 $c\bar{E} \sim c\rho\omega^2u^2$，即得到要求的吸收系数

$$\gamma \sim \frac{T\alpha^2\rho c}{aC}\sqrt{\chi\omega} \quad \left(\text{当 } \omega >> \frac{\chi}{a^2}\text{时}\right), \tag{34.7}$$

该式表示吸收系数正比于频率的平方根②.

这样一来，在极小的频率（$\omega << \chi/a^2$）情形下，多晶物体中的声吸收系数与 ω^2 一样变化；然后，在 $\chi/a^2 << \omega << c/a$ 范围内，声吸收系数正比于 $\omega^{1/2}$；而当 $\omega >> c/a$时，吸收系数重新回到正比于 ω^2.

同样的考虑也适用于细杆和薄板的横波衰减. 如果杆或板的厚度为 h，则当 $\lambda >> h$ 时，横向温度梯度是主要的，并且衰减主要是由热传导引起的（见本节习题）. 如果同时满足不等式 $\omega << \chi/h^2$，则可以认为振动是等温的. 因此，例如，在

---

① 注意，如果传热介质的边界是 $x=0$ 的平面，其超过的温度按 $T' = T'_0e^{-i\omega t}$ 规律周期地变化，则在介质中温度的分布可以用下面的"温度波"来描述：$T' = T'_0\exp\left[-i\omega t-(1+i)x\sqrt{\omega/(2\chi)}\right]$（参见第六卷，§ 52）.

② 在固体壁板（例如，沿圆筒）附近的液体或气体中传播的声，吸收与频率的关系也具有同样的特性. 参见第六卷，§ 79.

这种情形下确定杆或板的固有振动频率时，就可以引用等温弹性模量的值.

习　　题

习题 1　试确定杆的纵向固有振动的阻尼系数.

解：振动随时间的阻尼系数定义为

$$\beta=\frac{|\bar{\dot{E}}_{\text{mech}}|}{2\bar{E}},$$

振幅随时间的减小正比于 $e^{-\beta t}$.

在纵波时，在杆的任一小段产生了简单拉伸或压缩，其应变张量的分量为

$$u_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad u_{xx}=u_{yy}=-\sigma_{\text{ad}}\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

此时 $u_z=u_0\cos kz\cos\omega t$，其中

$$k=\frac{\omega}{\sqrt{E_{\text{ad}}/\rho}}.$$

用类似于正文中给出的方法计算，即可导出下面的阻尼系数表达式：

$$\beta=\frac{\omega^2}{2\rho}\left\{\frac{\eta}{3}\frac{3c_l^2-4c_t^2}{(c_l^2-c_t^2)c_t^2}+\frac{\zeta c_t^2}{(c_l^2-c_t^2)(3c_l^2-4c_t^2)}+\frac{\kappa T\rho^2\alpha^2}{9C_p^2}\right\}.$$

在这里，我们已按照公式(22.4)引入速度 c_l,c_t 代替 $E_{\text{ad}},\sigma_{\text{ad}}$.

习题 2　试确定板的纵向固有振动的阻尼系数.

解：对于振动方向与波方向(x 轴方向)平行的波，其应变张量中不为零的分量有

$$u_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x},\quad u_{zz}=-\frac{\sigma_{\text{ad}}}{1-\sigma_{\text{ad}}}\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

(见式(13.1)). 该波的传播速度等于

$$\left[\frac{E_{\text{ad}}}{\rho(1-\sigma_{\text{ad}}^2)}\right]^{1/2}.$$

经计算导出如下的结果：

$$\beta=\frac{\omega^2}{2\rho}\left\{\frac{\eta}{3}\frac{3c_l^4+4c_t^4-6c_l^2c_t^2}{c_t^2c_l^2(c_l^2-c_t^2)}+\frac{\zeta c_t^2}{c_l^2(c_l^2-c_t^2)}+\frac{\kappa T\alpha^2\rho^2(1+\sigma_{\text{ad}})^2}{9C_p^2}\right\}.$$

对于振动方向与波的方向垂直的波，$u_{ll}=0$，并且阻尼仅仅由一个黏性系数 η 制约. 这种情形下的阻尼系数总是由下面的公式确定：

$$\beta=\frac{\eta\omega^2}{2\rho c_t^2}.$$

杆扭转振动的阻尼也属于这种情况.

习题 3　试确定杆横向固有振动(频率满足条件：$\omega\gg\chi/h^2$，h 为杆的厚度)

的阻尼系数.

解:热传导在阻尼中起主要作用. 根据§17,对杆的任一体元,我们有

$$u_{zz}=\frac{x}{R},\quad u_{xx}=u_{yy}=-\sigma_{ad}\frac{x}{R}$$

(在 xz 平面弯曲). 当 $\omega\gg\chi/h^2$ 时,是绝热振动. 在小挠度弯曲时,曲率半径 $R=1/X''$,所以

$$u_{ii}=(1-2\sigma_{ad})xX''$$

(撇号′表示对 z 取导数). 在杆的横方向上温度变化最快,因此 $(\nabla T)^2\approx(\partial T/\partial x)^2$. 借助于式(34.1)和(34.2)得到整个杆的平均耗散能:

$$-\frac{\kappa T\alpha^2E_{ad}^2S}{9C_p^2}\int\overline{X''^2}\mathrm{d}z$$

(S 为杆的横截面面积). 总平均能可以作为势能

$$E_{ad}I_y\int\overline{X''^2}\mathrm{d}z$$

的二倍求得. 最终得到阻尼系数:

$$\beta=\frac{\kappa T\alpha^2SE_{ad}}{18I_yC_p^2}.$$

习题 4 试确定板横向固有振动(频率满足条件:$\omega\gg\chi/h^2$,h 为板的厚度)的阻尼系数.

解:根据式(11.4),对板的任一体元,我们有

$$u_{ii}=-\frac{1-2\sigma_{ad}}{1-\sigma_{ad}}z\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$$

(在 xz 平面弯曲). 按公式(34.1)和(34.2)求出耗散能,而总平均能为表达式(11.6)的二倍. 阻尼系数等于

$$\beta=\frac{2\kappa T\alpha^2E_{ad}}{3C_p^2h^2}\frac{1+\sigma_{ad}}{1-\sigma_{ad}}=\frac{2\kappa T\alpha^2\rho}{3C_p^2h^2}\frac{(3c_l^2-4c_t^2)^2c_t^2}{(c_l^2-c_t^2)c_l^2}.$$

习题 5 试确定与非绝热振动有关的杆横向振动固有频率的变化. 假设杆的形状是一个长条薄板,厚度为 h,杆的表面是隔热的.

解:设 $T_{ad}(x,t)$ 是绝热振动时杆内的温度分布,而 $T(x,t)$ 是杆内真实的温度分布(x 是沿杆厚度的坐标. 而温度沿 yz 平面的变化被忽略,因为变化非常缓慢). 很明显,由于 $T=T_{ad}$ 时,物体各个部分之间不存在热交换,热传导方程应为如下形式:

$$\frac{\partial}{\partial t}(T-T_{ad})=\chi\frac{\partial^2T}{\partial x^2}.$$

在具有频率为 ω 的周期振动时,温度从原来的平衡值 T_0 偏离为 $\tau_{ad}=T_{ad}-T_0$,

$\tau = T - T_0$,它们都正比于 $e^{-i\omega t}$. 由此,我们有

$$\tau'' + \frac{i\omega}{\chi}\tau = \frac{i\omega}{\chi}\tau_{ad}$$

(撇号′表示对 x 取导数). 因为根据式(34.2),τ_{ad} 正比于 u_{ll},而 u_{ik} 的分量正比于 x(见§17),所以 $\tau_{ad} = Ax$,其中 A 是常数,我们不需要计算它(因为在最后的解答中会消失). 当具有在 $x = \pm h/2$ 时,$\tau' = 0$(杆的表面隔热)的边界条件时,方程

$$\tau'' + \frac{i\omega}{\chi}\tau = \frac{i\omega}{\chi}Ax$$

的解是

$$\tau = A\left(x - \frac{\sin kx}{k\cos(kh/2)}\right), \quad k = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}.$$

当杆在 xz 平面内弯曲时,应力形成的弯矩 M_y 是由等温部分 $M_{y,iso}$(等温弯曲时的弯矩)和与杆的非均匀加热有关的部分一起形成的. 如果 $M_{y,ad}$ 是绝热弯曲时的弯矩,则在非完全绝热过程中,弯矩附加部分与 $M_{y,ad} - M_{y,iso}$ 相比较按下面的比例减小:

$$1 + f(\omega) = \int_{-h/2}^{h/2} z\tau \mathrm{d}z \Big/ \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{ad}\mathrm{d}z.$$

对任意频率 ω 确定杨氏模量 E_ω,像 M_y 与 I_y/R 的比例系数(见式(17.8))一样,同时注意到 $E_{ad} - E = E^2T\alpha^2/(9C_p)$(见式(6.8),$E$ 是等温杨氏模量),即可写出

$$E_\omega = E + [1 + f(\omega)]E^2\frac{T\alpha^2}{9C_p}.$$

经计算得到 $f(\omega)$ 的表达式:

$$f(\omega) = \frac{24}{h^3k^3}\left(\frac{kh}{2} - \tan\frac{kh}{2}\right).$$

当 $\omega \to \infty$ 时,应有 $f = 1$,因此 $E_\infty = E_{ad}$;而当 $\omega \to 0$ 时,$f = 0$,及 $E_0 = E$.

固有振动频率正比于杨氏模量的平方根(见§25 的习题 4—6). 于是有

$$\omega = \omega_0\left[1 + f(\omega_0)\frac{ET\alpha^2}{18C_p}\right],$$

式中 ω_0 是完全绝热条件下的固有振动频率值. ω 是复数. 将实部和虚部分开($\omega = \omega' + i\beta$),最后我们得到固有频率

$$\omega' = \omega_0\left(1 - \frac{ET\alpha^2}{3C_p}\frac{1}{\xi^3}\frac{\sinh\xi - \sin\xi}{\cosh\xi + \cos\xi}\right)$$

和阻尼系数

$$\beta = \frac{2ET\alpha^2\chi}{3C_ph^2}\left(1 - \frac{1}{\xi}\frac{\sinh\xi + \sin\xi}{\cosh\xi + \cos\xi}\right),$$

式中引用符号 $\xi = h(\omega_0/2\chi)^{1/2}$.

在大的 ξ 值时，频率 ω 应趋于 ω_0（理应如此），而阻尼系数趋于

$$\beta = \frac{2ET\alpha^2\chi}{3C_p h^2},$$

这与习题 3 的结果是一致的.

而小的 ξ 值时，几乎与等温条件相符合. 在这种情形下

$$\omega \approx \omega_0\left(1 - \frac{ET\alpha^2}{18C_p}\right) \approx \omega_0\left(\frac{E}{E_{ad}}\right)^{1/2},$$

而阻尼系数

$$\beta = \frac{ET^2\alpha^2h^2}{180C_p\chi}\omega_0^2.$$

§ 35　高黏性流体

对于典型流体，纳维－斯托克斯方程一直到运动周期远大于分子时间的情形时总是适用的. 但是，对于高黏性流体是不适合的. 对于这种流体，在运动周期非常大时，通常的流体动力学方程已经变得不再适用了. 这种黏性流体，在足够短的时间（但仍大于分子时间）间隔内，其表现就像固体（例如：甘油，松香）一样. 非晶固体（如玻璃）可以视为这种具有最高黏性流体的极限情形.

这种流体的性质可以用下述的方法来描述（由麦克斯韦（Maxwell）提出）：在很短的时间间隔内，它们是弹性形变. 但是，在形变停止以后，其内部仍然保留着随时间衰减的剪应力，因而在足够大的时间间隔之后，流体中实际上任何应力也没有留下来. 设 τ 是发生应力衰减的时间数量级（τ 有时称为**麦克斯韦弛豫时间**）. 假设流体受到某一具有频率 ω 随时间周期变化的外力作用，如果力的变化周期 $\frac{1}{\omega}$ 远远大于弛豫时间 τ，亦即 $\omega\tau \ll 1$，则所研究的流体将表现为通常的黏性流体. 相反，当频率 ω 足够大（即 $\omega\tau \gg 1$）时，流体将表现为非晶固体.

对应于所研究流体的这种“中间（过渡）的”性质，它们可以同时用黏性系数 η 和某种“剪切模量”μ 来描述. 不难得到 η，μ 和弛豫时间 τ 彼此在数量级方面的相互关系. 当作用具有足够小频率的周期力时，这种流体的表现与通常的流体一样，应力张量由流体中黏性应力的通常表达式确定，亦即

$$\sigma_{ik} = 2\eta\dot{u}_{ik} = -2i\eta\omega u_{ik}.$$

在相反的大频率极限情形，流体表现为和固体一样，并且内部的应力必须用弹性理论公式来确定，亦即 $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$（这里说的是“纯剪形变”，因而假设 $u_{ii} = 0$，$\sigma_{ii} = 0$，）. 当频率的数量级为 $\omega \sim 1/\tau$ 时，由上面两个表达式确定的应力，按数量级来说应是相同的，于是有 $\eta u/\lambda\tau \sim \mu u/\lambda$，由此得到

$$\eta \sim \tau\mu. \tag{35.1}$$

这即是所求的关系.

最后，让我们推导用来定性描述高黏性流体性质的运动方程. 为此，我们从最简单的应力（在运动停止以后）衰减规律假设开始，即认为应力按简单的指数规律衰减，相应的方程是

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{ik}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}\sigma_{ik}.$$

另一方面，在固体中已有 $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$，因此

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{ik}}{\mathrm{d}t} = 2\mu\frac{\mathrm{d}u_{ik}}{\mathrm{d}t}.$$

显而易见，方程

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{ik}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\sigma_{ik} = 2\mu\frac{\mathrm{d}u_{ik}}{\mathrm{d}t} \tag{35.2}$$

在缓慢运动和快速运动两种极限情形下都能导出正确的结果，因此，可以作为过渡情形的插入方程.

例如，对于周期运动，当 u_{ik} 和 σ_{ik} 是通过因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 而依赖于时间时，由式（35.2）有

$$-\mathrm{i}\omega\sigma_{ik} + \frac{1}{\tau}\sigma_{ik} = -2\mathrm{i}\omega\mu u_{ik},$$

于是

$$\sigma_{ik} = \frac{2\mu}{1+\mathrm{i}/(\omega\tau)}u_{ik} \tag{35.3}$$

当 $\omega\tau \gg 1$ 时，该式给出 $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$，即固体的通常表达式. 而当 $\omega\tau \ll 1$ 时

$$\sigma_{ik} = -2\mathrm{i}\mu\tau\omega u_{ik} = 2\mu\tau\dot{u}_{ik},$$

这即是具有黏性系数为 $\mu\tau$ 的流体的通常表达式.

第六章

液 晶 力 学[①]

§36　向列相液晶的静力形变[②]

从宏观观点来看，液晶是各向异性的流动介质．这种介质的力学，既带有通常流体介质的固有特征，又带有弹性介质的固有特征，就这个意义来说，它处于流体动力学和弹性理论之间的位置．

有各种类型的液晶．由各类**向列相液晶**（或者，为了简便，通常就叫**向列相**）组成的介质，在未形变状态，不仅在宏观上，而且在微观上也是均匀的，介质的各向异性只与分子在空间取向的各向异性有关（见第五卷 §139，§140）．绝大多数已知的向列相属于最简单的类型，在这些向列相中，各向异性完全取决于在介质中每一点给定的辨别其方向的单位矢量 $\boldsymbol{n}$，矢量 $\boldsymbol{n}$ 称为**指向矢**．在这种情形下，$\boldsymbol{n}$ 和 $-\boldsymbol{n}$ 只有识别符号的意义，物理上是等价的[③④]．因此，识别的只是沿其两个相反方向等价确定的轴．最后，这种类型向列相的特性（在它每个体元上）是关于反演（即三个坐标全变号）的不变性[⑤]．下面，我们只研究这类向列相液晶．

这样一来，描述向列相介质每一个给定点的状态，除了流体通常有的量——密度 ρ，压力 p 和速度 $\boldsymbol{v}$ 外，还有一个指向矢 $\boldsymbol{n}$．所有这些量都作为坐标和时间的

---

① 本章与皮塔耶夫斯基（Л. П. Питаевский）共同编写．

② 在物理学上，根据组成成分和出现液晶相的物理条件，大体上把液晶分为热致液晶和溶致液晶两大类，从分子排列的有序性上把热致液晶分为三类，即丝状相液晶，螺旋状相液晶，层状相液晶；而在化学上，按其组成结构又把这三类热致液晶相应地称为向列相液晶，胆甾相液晶，近晶相液晶．本章主要研究的是这三类液晶相的力学问题．——译者注

③④ 在向列相液晶中，$\boldsymbol{n}$ 和 $-\boldsymbol{n}$ 的等价性系指把 $\boldsymbol{n}$ 代换为 $-\boldsymbol{n}$ 时，系统的一切不变；而反演不变性系指相对于任意垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的平面两边的系统都是对称的．——译者注

⑤ 关于非反演不变的向列相，形变是不稳定的，它将被变成所谓的胆甾相，见 §43．

未知函数包含在向列相液晶的运动方程中.

在平衡状态,没有受到外力(其中包括来自限制它的壁板方面的)作用的静止向列相是均匀的:在它的全部体积内 $\boldsymbol{n}=\text{const}$. 而在已形变的向列相中,指向矢的方向沿着空间缓慢地变化,在这里"缓慢"指的是在通常意义下对宏观理论来说的;即形变的特征长度远大于分子的尺度,因此,导数 $\partial n_i/\partial x_k$ 应视为小量.

在这一章,像以前各章一样,我们将认为所有的热力学量都是对形变后物体单位体积的,而不是对未形变单位体积的. 因而,某种向列相介质的自由能密度 F 是由未形变向列相的自由能 $F_0(\rho,T)$ 和形变的自由能 F_d 形成的. 这后面一项是 $\boldsymbol{n}$ 的导数之平方的表达式,它的一般形式是(奥森(C. W. Oseen),1933;弗兰克(F. C. Frank),1958;依里克森(J. L. Ericksen),1962):

$$F_d=F-F_0=\frac{K_1}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{n})^2+\frac{K_2}{2}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{n})^2+\frac{K_3}{2}(\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{n})^2 \qquad (36.1)$$

(参见第五卷,§140). 注意,关于单位矢量 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$,由于恒等式 $\nabla\,\boldsymbol{n}^2\equiv 0$,所以等式

$$\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{n}=-(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{n}. \qquad (36.2)$$

因此,在式(36.1)中的最后一项同样可以写为等价的形式:$K_3[(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{n}]^2/2$.

能量式(36.1)在向列相液晶力学中起的作用,类似于固体形变的弹性能的作用. 正是如此,向列相力学增添了某些弹性理论的特点①.

在式(36.1)中导出的三个平方项的组合,彼此是独立的:其中的每一项,在另外两项等于零时,都可以不为零. 因此,未形变状态的稳定性条件要求三项的所有系数 K_1,K_2,K_3(密度和温度的函数)都为正,我们把它们称为**向列相弹性模量**(或**弗兰克模量**).

假如在形变中,其不为零的量只是 $\nabla\cdot\boldsymbol{n}$,$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{n}$ 或 $\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{n}$ 这些量中的一个,相应的形变称为**展曲**,**扭曲**或**弯曲**②③. 在一般情形下,向列相的形变同时包含所有这三类因素. 为了说明它们的性质,这里我们举出几个简单的例子. 假设向列相介质充满两个同轴圆柱面之间的空间,设 ρ,φ,z 是圆柱坐标,取圆柱面的中心轴为 z 轴. 如果介质每一点的指向矢 $\boldsymbol{n}$ 均沿着半径方向($n_r=1,n_\varphi=n_z=0$),则形变是展曲($\nabla\cdot\boldsymbol{n}=1/r$). 如果每一点 $\boldsymbol{n}$ 的方向均沿着中心为 z 轴的圆周方向($n_\varphi=1,n_r=n_z=0$),则我们有一个纯弯曲($(\nabla\times\boldsymbol{n})_z=1/r$). 最后,如

① 一般来说,液晶的形变导致它介电极化和相应的电场(参见第八卷,§17),这个效应通常是微弱的,我们不去考察它对于介质的力学性质的影响,同样也不去考察外磁场对液晶性质的影响. 由于向列相对磁(实际上是抗磁)的磁化率是各向异性的,故磁场对它有确定方向作用.

② 按英文的术语分别为 splay,twist,bend.

③ 按俄文原文相对应的直译为横向弯曲,扭曲,纵向弯曲. 这里的中文名称是采用国内学者广泛应用的英文术语译出的. ——译者注

果 $\boldsymbol{n}$ 沿着向列相平行平面层的厚度（z 轴）方向，指向矢按规律 $n_x=\cos\varphi(z)$，$n_y=\sin\varphi(z)$，$n_z=0$ 变化，则我们遇到的是纯扭曲（$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{n}=-\varphi'(z)$）.

限制占据液晶介质体积的壁板，就连它的自由表面也给介质以定向作用（关于这点将在下面说明）. 因此，一般来说，限制表面存在的本身就已经导致了静止液晶介质的形变. 这就出现了寻求由该形变确定的方程解的问题. 换句话说，就是关于在给定边界条件下，由均匀分布 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 确定的方程的求解问题（J. L. 依里克森，1966）.

为此，根据一般的热力学平衡条件——物体总自由能最小. 也就是函数 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 的泛函——积分 $\int F\mathrm{d}V$ 最小. 因为矢量 $\boldsymbol{n}$ 是单位矢量，该泛函应该在附加条件 $\boldsymbol{n}^2=1$ 时最小. 下面直接应用熟知的拉格朗日乘子法，应要求变分

$$\delta\int\left\{F-\frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}^2\right\}\mathrm{d}V \tag{36.3}$$

等于零，式中 $\lambda(\boldsymbol{r})$ 是某个函数. 被积分表达式既与函数 $n_i(\boldsymbol{r})$ 本身有关，又与它的导数有关. 我们有[①]

$$\begin{aligned}\delta\int F\mathrm{d}V &= \int\left\{\frac{\partial F}{\partial n_i}\delta n_i+\frac{\partial F}{\partial(\partial_k n_i)}\partial_k\delta n_i\right\}\mathrm{d}V=\\ &=\int\left\{\frac{\partial F}{\partial n_i}-\partial_k\frac{\partial F}{\partial(\partial_k n_i)}\right\}\delta n_i\mathrm{d}V+\oint\frac{\partial F}{\partial(\partial_k n_i)}\delta n_i\mathrm{d}f_k\end{aligned} \tag{36.4}$$

第二项是遍及物体表面的积分，只是对于按边界条件求解时极其重要，我们姑且假定在边界上 $\delta\boldsymbol{n}=0$，对总自由能取变分，我们求得

$$\delta\int F\mathrm{d}V=-\int\boldsymbol{H}\delta\boldsymbol{n}\mathrm{d}V, \tag{36.5}$$

式中 $\boldsymbol{H}$ 是一矢量，其分量如下：

$$H_i=\partial_k\Pi_{ki}-\frac{\partial F}{\partial n_i},\quad \Pi_{ki}=\frac{\partial F}{\partial(\partial_k n_i)}, \tag{36.6}$$

矢量 $\boldsymbol{H}$ 起着场的作用，称为**分子场**，它力图使整个液晶体积内 $\boldsymbol{n}$ 的方向"伸直".

方程(36.3)变为

$$\int(\boldsymbol{H}+\lambda\boldsymbol{n})\delta\boldsymbol{n}\mathrm{d}V=0,$$

按此式，由于变分 $\delta\boldsymbol{n}$ 的任意性求出平衡方程 $\boldsymbol{H}=-\lambda\boldsymbol{n}$，所以 $\lambda=-\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}$，亦即，该方程的纵向分量由选择 λ 来满足. 因此，实际上的平衡条件归结为要求在介质的每一点上矢量 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 共线，而 $\boldsymbol{H}$ 的纵向分量没有物理意义. 于是，平衡条件可以改写为

---

① 本章为简化公式的书写，我们将利用在现代书刊中常用的用坐标表示微分算子的简化方法：$\partial_i=\partial/\partial x_i$.

$$\boldsymbol{h} \equiv \boldsymbol{H} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H}) = 0, \tag{36.7}$$

对于引入的矢量 $\boldsymbol{h}$，有 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{h} = 0$.

我们来求适合于自由能(36.1)的分子场的显式表达式. 为了对 $\partial_k n_i$ 求微分，我们注意到

$$\nabla \cdot \boldsymbol{n} = \partial_i n_i, \quad (\nabla \times \boldsymbol{n})_l = e_{lki} \partial_k n_i,$$

(式中 e_{ikl} 是反称单位张量)，因此

$$\frac{\partial \nabla \cdot \boldsymbol{n}}{\partial(\partial_k n_i)} = \delta_{ik}, \quad \frac{\partial}{\partial(\partial_k n_i)}(\nabla \times \boldsymbol{n})_l = e_{lki}.$$

最后得到关于张量 Π_{ki} 的表达式

$$\Pi_{ki} = K_1 \delta_{ik} \nabla \cdot \boldsymbol{n} + K_2 (\boldsymbol{n} \cdot \nabla \times \boldsymbol{n}) n_l e_{lki} + K_3 [(\boldsymbol{n} \times \nabla \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n}]_l e_{lki}. \tag{36.8}$$

按式(36.6)的定义，进一步微分得出分子场如下十分复杂的公式：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} = \nabla(K_1 \nabla \cdot \boldsymbol{n}) - \{K_2(\boldsymbol{n} \cdot \nabla \times \boldsymbol{n}) \nabla \times \boldsymbol{n} + \nabla \times [K_2(\boldsymbol{n} \cdot \nabla \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}]\} + \\ + \{K_3[(\boldsymbol{n} \times \nabla \times \boldsymbol{n}) \times \nabla \times \boldsymbol{n}] + \nabla \times [K_3 \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \nabla \times \boldsymbol{n})]\}. \end{aligned} \tag{36.9}$$

对于平衡方程我们不能建立一般形式的边界条件：它们不仅与弹性能(36.1)有关，而且与液体和限制它的壁板之间相互作用的具体类型有关，这个表面能必须包括在总自由能里面，由这个总自由能的最小值确定平衡条件. 实际上，这些表面力通常都是很大的，以致可以不管样品形变的性质而确定边界上 $\boldsymbol{n}$ 的方向. 如果固体边界的表面是各向异性的，则这个方向是完全确定的(或是一些确定的方向中的一个). 如果表面是各向同性的(这里属于自由表面情形)，则只是给定 $\boldsymbol{n}$ 与表面法线之间的夹角. 如果这个夹角等于零，则 $\boldsymbol{n}$ 具有完全确定的方向——表面的法线方向. 如果夹角不等于零，则 $\boldsymbol{n}$ 的容许方向为充满具有确定张角的圆锥表面.

在这个最后的情形中，必须提出补充的边界条件. 它要求在式(36.4)中对于变分 $\delta\boldsymbol{n}$ 的表面积分变为零来确定，这个变分是 $\boldsymbol{n}$ 环绕与其保持倾角的表面上每点法线的转动(即变分不改变表面能). 这样的变分具有 $\delta\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{n})\delta\varphi$ 的形式，其中 $\boldsymbol{\nu}$ 是单位法矢量，$\delta\varphi$ 是任意(在表面上的每一点)旋转角. 而表面面元可写为 $\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\nu}\mathrm{d}f$，于是我们得到

$$\oint \Pi_{ki} e_{imn} n_n \nu_m \nu_k \delta\varphi \mathrm{d}f = 0,$$

由于 $\delta\varphi$ 的任意性，得到边界条件

$$\Pi_{ki} e_{imn} n_n \nu_m \nu_k = 0, \tag{36.10}$$

或，z 轴方向沿着 $\boldsymbol{\nu}$：

$$\Pi_{zx} n_y - \Pi_{zy} n_x = 0. \tag{36.11}$$

最后，对于在式(36.1)中出现的弹性模量还要作如下的说明. 它们是作为

确定物体等温形变的系数引入自由能的. 但是,不难看出,在向列相的绝热形变中也同样是由这些系数确定的. 实际上,我们在 §6 中已经看到,对于固体,等温和绝热模量之间出现的差别,是由于在自由能中存在应变张量的线性项. 对于向列相,若导数$\partial_k n_i$的线性项能起着类似地作用,这样的项必须是数量,并且在 $\boldsymbol{n}$ 改变符号时它是个不变量. 显然,这类项是不可能构造的(乘积$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{n}$是个伪标量,而唯一的一个真标量$\nabla\cdot\boldsymbol{n}$与 $\boldsymbol{n}$ 一起变号). 由于这个原因,向列相的等温和绝热模型彼此是相符的(这恰似各向同性固体剪切模量所出现的那样,见 §6). 这些讨论也可以按某些另外的方式简短地表述:在没有线性项时,弹性能(36.1)的平方项是对未形变物体热力学量的第一次"小修正",由于是"小增量理论"(参见第五卷, §15),当表达式用相应的热力学变量(温度或熵)表示的时候,它对自由能和对内能是一样的.

§37 向列相液晶的直线向错

向列相介质在给定边界条件下的平衡状态,不一定处处都有连续分布的 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$(矢量 $\boldsymbol{n}$ 在每一点都有完全确定的方向). 在向列相力学中,也必须研究包含奇异点或奇异线的 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 场的形变,在奇异点或奇异线上 $\boldsymbol{n}$ 的方向是不确定的. 这种线性奇异性称为**向错**.

发生向错的可能性,可以举几个简单的例子来说明. 我们来考察在长圆柱形容器中的向列相,而且边界条件要求 $\boldsymbol{n}$ 垂直容器的表面. 自然可以预料,在平衡时每一点上的矢量 $\boldsymbol{n}$ 都位于圆柱形容器的横截平面上,并且方向沿着该截面的半径(表示在图 27(a)上). 显然,这时在圆柱形容器的中心轴上,$\boldsymbol{n}$ 的方向将是不确定的,因此该中心轴就是向错. 如果边界条件要求在容器的横截面上,$\boldsymbol{n}$ 的方向平行于容器壁,则确信位于该平面上矢量 $\boldsymbol{n}$ 的分布是处处都沿着以圆柱

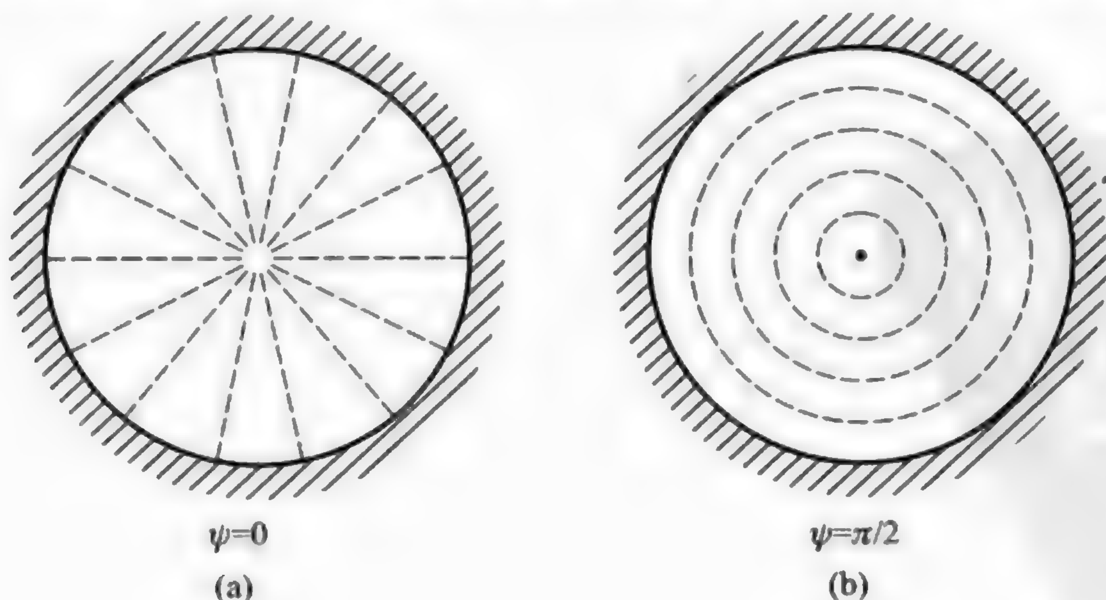


图 27

面轴心为中心的同心圆上(图 27(b)). 在这种情形下,在中心轴上 $\boldsymbol{n}$ 的方向也将是不确定的.

上面是直线向错的两个简单而特殊的例子. 我们现在来研究在无限向列相介质中直线向错中 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 可能分布的一般问题. 很明显,在这样的向错中,$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 的分布与沿向错长度的坐标无关,所以在垂直于向错轴的平面上来研究它就足够了. 我们将认为矢量 $\boldsymbol{n}$ 本身处处都位于该平面上. 这样一来,我们研究的就是向列相力学的平面问题了. 该问题解的若干一般性质已经能够由普遍理论阐明,而不用去研究具体的平衡方程.

引入圆柱坐标系 r,φ,z,而 z 轴沿着向错轴. 正如已经指出的那样,$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 的分布与坐标 z 无关. 同样,它也不可能与坐标 r 有关,这是因为在提供的问题(无限介质中的向错)中没有任何带有长度因次的参数,由此就可以构造变量 r 的无因次函数(如 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 一类便是),因而,待求的分布就只与角变量有关:$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(\varphi)$.

在 $z=\text{const}$ 的平面上,引入 $\boldsymbol{n}$ 与通过给定点径矢之间的夹角 ψ(图 28),在该平面上矢量 $\boldsymbol{n}$ 的二维分量:

$$n_r=\cos\psi,\quad n_\varphi=\sin\psi.$$

极角 φ 从平面上某个选择的方向(极轴)算起. 同时引入 $\boldsymbol{n}$ 与极轴的夹角 ϑ,显见,$\vartheta=\varphi+\psi$.

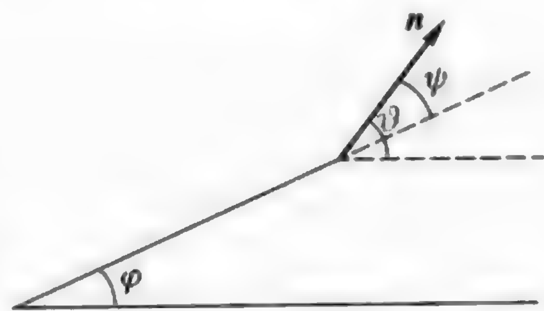


图 28

未知解由函数 $\psi(\varphi)$ 确定. 它必须满足物理上的单值性条件,即当变量 φ 改变 2π(亦即,绕坐标原点绕行一周)时,矢量 $\boldsymbol{n}$ 必须保持不变(精确到符号,由于 $\boldsymbol{n}$ 与 $-\boldsymbol{n}$ 的方向在物理上的等价性,容许改变符号). 这就意味着,必须有

$$\vartheta(\varphi+2\pi)=\vartheta(\varphi)+2\pi n,$$

式中 n 为正的或负的整数或半整数($n=0$ 相应于 $\boldsymbol{n}=\text{const}$ 的"未形变"状态). 函数 $\psi(\varphi)=\vartheta-\varphi$,因此有

$$\psi(\varphi+2\pi)=2\pi(n-1)+\psi(\varphi).\tag{37.1}$$

数 n 称为向错的**弗兰克(Frank)指标**.

平衡方程(将在下面写出)由导数 $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\varphi$ 确定并具有如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{1}{f(\psi)},\tag{37.2}$$

该式右边没有包含无关的变量 φ,这是因为在对整个系统(向列相)作为整体绕 z 轴任意旋转(亦即,对于变换 $\varphi\to\varphi+\varphi_0$)时,方程必须是不变的. 函数 $f(\psi)$ 是周期为 π 的周期函数,因为 ψ 和 $\psi+\pi$ 在物理上是一样的. 由此

$$\varphi=\int_0^{\psi}f(x)\,\mathrm{d}x,\tag{37.3}$$

式中的积分常数这样来选取,即当 $\varphi=0$ 时,$\psi=0$. 将该表达式代入式(37.1),得到

$$\bar{f}\equiv\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}\quad(n\neq1),\tag{37.4}$$

(f 上面的横杠表示按函数周期取平均值).

由此可以得出关于向错对称性的重要结论:当整个图形绕 z 轴旋转的角度为 $\varphi_0=\dfrac{2\pi}{2(n-1)}$时,角 ψ 改变了 π,亦即整个分布保持不变. 实际上,考虑到函数 $f(\psi)$ 的周期性,该变换导致恒等式

$$\varphi+\frac{\pi}{n-1}=\int_0^{\psi+\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\psi}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\psi}^{\psi+\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\varphi+\bar{f}\pi.$$

这样一来,由于只有一个单值性要求,z 轴自然的成为对称轴(C_m),其阶数为

$$m=2|n-1|\quad(n\neq1).\tag{37.5}$$

指向矢的"流线"定义为这样的线,在该线线元 $\mathrm{d}l$($\mathrm{d}l_r=\mathrm{d}r,\mathrm{d}l_\varphi=r\mathrm{d}\varphi$)上的每一点都与 $\boldsymbol{n}$ 平行. 流线的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}l_\varphi}{\mathrm{d}l_r}=\frac{n_\varphi}{n_r},$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\ln r}=\tan\psi.\tag{37.6}$$

由此可见,特别是,在流线之中存在有 $\psi=p\pi$(p 为整数)的直线. 这些线是 $2|n-1|$的径向射线

$$\varphi=\frac{\pi}{|n-1|}p\equiv\varphi_p,\psi=p\pi,p=0,1,2,\cdots,m-1.\tag{37.7}$$

向错的横截面被这些射线分成 m 个相同的彼此重复的扇形.

现在转向对于向列相求解的具体作法,它们的形变能由公式(36.1)①得到.

对于平面分布,有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}n_\varphi}{\mathrm{d}\varphi}+\frac{n_r}{r}=\frac{1}{r}\cos\psi\cdot(1+\psi'),$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{n})_z=-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}n_r}{\mathrm{d}\varphi}+\frac{n_\varphi}{r}=\frac{1}{r}\sin\psi\cdot(1+\psi'),$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{n}=0$$

---

① 该问题在 $K_1=K_3$ 的特殊情形已经由奥森(C. W. Oseen,1933)和弗兰克(F. C. Frank,1958)解决了,下面叙述的一般解属于加洛辛斯基(И. Е. Дзялошинский,1970).

($\psi' \equiv \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\varphi$). 在自由能中只保留了带有 K_1 和 K_3 的项①：

$$\int F_d r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{K_1 + K_3}{4}\int (1 - \alpha\cos 2\psi)(1 + \psi'^2)\frac{\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r}{r} \quad \alpha = \frac{K_3 - K_1}{K_3 + K_1}.$$

对 $\mathrm{d}r$ 的积分是发散的对数. 在实际问题中，将它在某长度 R（样品尺寸的数量级）以上和在距离 a（分子尺度的数量级）以下部分截去，这里宏观理论不再适用. 在确定我们感兴趣的解时，在距离 $a \ll r \ll R$ 范围内，可以认为因子

$$L = \int \frac{\mathrm{d}r}{r} \approx \ln\frac{R}{a}$$

只是个常量，所以平衡分布的 $\psi(\varphi)$ 由下面泛函的极小值确定：

$$\int_0^{2\pi}(1 - \alpha\cos 2\psi)(1 + \psi'^2)\mathrm{d}\varphi = \min \tag{37.8}$$

该变分问题的欧拉方程是

$$(1 - \alpha\cos 2\psi)\psi'' = \alpha\sin 2\psi(1 - \psi'^2). \tag{37.9}$$

首先，它有两个明显的解：

$$\psi = 0 \tag{37.10}$$

和

$$\psi = \pi/2. \tag{37.11}$$

这是轴对称解，它们与图 27(a) 和 (b) 相对应②. 这两个解是单值的，亦即该向错的弗兰克指标 $n = 1$（比较式(37.1)）.

为了求得 $n \neq 1$ 的解，我们注意到，方程(37.9)的第一次积分③，有

$$(1 - \alpha\cos 2\psi)(\psi'^2 - 1) = \mathrm{const} \equiv \frac{1}{q^2} - 1. \tag{37.12}$$

由此得到式(37.3)具有如下函数形式的解：

$$f(x) = q\left(\frac{1 - \alpha\cos 2\psi}{1 - \alpha q^2\cos 2\psi}\right)^{1/2}. \tag{37.13}$$

常数 q 由式(37.4)的条件确定：

$$(n - 1)q\int_0^{\pi}\left(\frac{1 - \alpha\cos 2\psi}{1 - \alpha q^2\cos 2\psi}\right)^{1/2}\mathrm{d}\psi = \pi \tag{37.14}$$

---

① 下面的被积表达式略去了全导数 $(1 - \alpha\cos 2\psi)\cdot 2\psi' = (2\psi - \alpha\sin 2\psi)'$，这不会影响变分问题的公式. 在这里，我们重新导出平衡方程，而不用事实上需要进行大量烦琐计算的一般方程(36.7)和(36.8).

② 注意，在"退化的"情况下，$K_1 = K_3$，$\alpha = 0$，存在 $\psi = \mathrm{const}$（任意）的解.

③ 如果把式(37.8)的被积表达式视为一维的力学系统（并且，ψ 起到广义坐标的作用，φ 起到时间的作用）的拉格朗日函数，则式(37.12)是能量的积分.

(此时,必须$|\alpha|q^2<1$). 这些公式确定了未知的解. 对于每一个 n,解都是唯一的,这是因为条件(37.14)的左边是 q 的单调递增函数,只有一个 q 值满足这一等式. 函数 $f(x)$ 是偶函数,因而 $\varphi(\psi)$ 是奇函数. 这就是说,$\varphi=0$ 的平面是对称分布的平面. 由于存在对称轴 C_m,从而又出现 $m-1$ 个通过 z 轴的对称平面. 最后,很明显,$z=0$ 的平面是对称平面. 这样一来,指标为 n 的向错,总共具有的对称点群为 $\boldsymbol{D}_{mh}$.

当 $n=2$ 时,由式(37.14),很明显地得出 $q=1$,而相应的解是

$$\psi=\varphi=\vartheta/2. \tag{37.15}$$

为了定性的阐明所得解的特性,我们来研究在式(37.7)中的径向射线 $\varphi=\varphi_p$附近之流线的性状. 在这些射线上 $\psi=p\pi$,而在射线附近 $\psi\approx p\pi$,而式(37.13)的函数归结为常数:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi}=f(\psi)\approx q\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha q^2}\right)^{1/2}\equiv\lambda. \tag{37.16}$$

由此

$$\psi-\pi p\approx\frac{1}{\lambda}(\varphi-\varphi_p).$$

流线的微分方程具有如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}\ln r}{\mathrm{d}\varphi}=\cot\psi\approx\frac{1}{\psi-\psi_p}\approx\frac{\lambda}{\varphi-\varphi_p},$$

由此我们求得射线附近的流线公式:

$$r=\mathrm{const}\cdot|\varphi-\varphi_p|^{\lambda}. \tag{37.17}$$

如果引入笛卡尔坐标,并使 x 轴沿着射线,则在射线附近 $r\approx x,\varphi-\varphi_p\approx y/x$,而流线方程写为如下形式:

$$y=\mathrm{const}\cdot x^{1+1/\lambda}. \tag{37.18}$$

其次,我们来研究几种不同的情况. 当 $n\geqslant3/2$ 时,有 $n-1>0$,而由式(37.14)很明显,$q>0$ 并因此 $\lambda>0$. 在这种情形下,流线从坐标原点离去,并与射线相切.

当 $n=1/2$ 时,参数 $q<0$,从而 $\lambda<0$. 方程(37.14)的数值分析表明 $q^2>1$,因此$|\lambda|>1$. 由式(37.18)可见,y 随着 x 一起增长. 坐标原点附近的区域不能用这样的方法来处理,因为根据式(37.17),当 $\lambda<0$ 时,小的 $\varphi-\varphi_p$ 值对应于大的 r 值.

最后,当 $n<0$ 时,$-1<\lambda<0$,并且根据式(37.18),当 $x\to\infty$ 时 $y\to0$. 流线是靠近射线的渐近线.

在图 29 上,简略的表示出具有 $n=3/2,n=1/2$ 和 $n=-1/2$ 的向错流线.

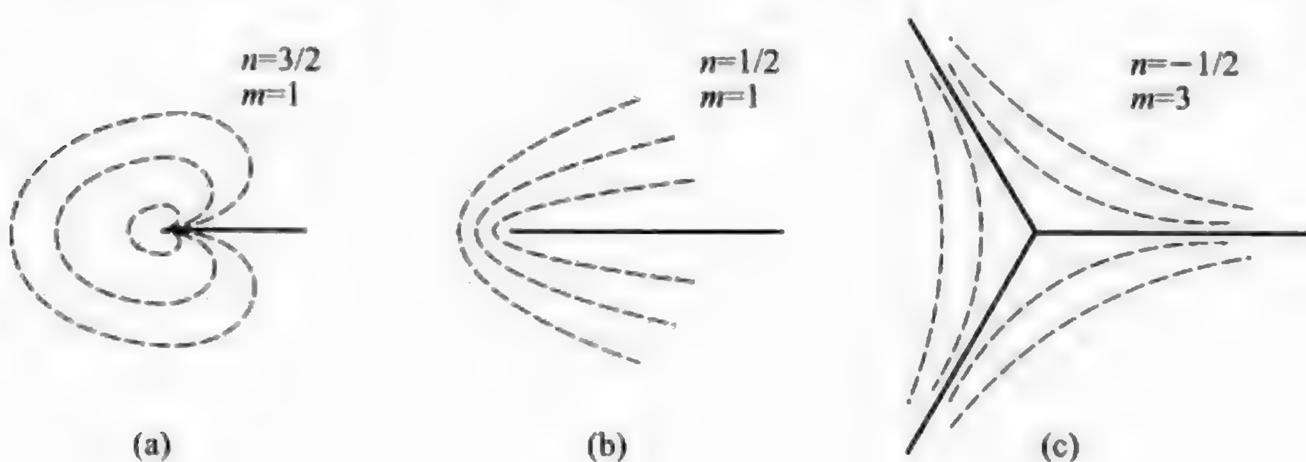


图 29

§38　向列相液晶平衡方程的非奇异轴对称解

由弗兰克指标 $n=1$ 的向错引起的轴对称形变(37.10),(37.11)(见图 27),是在容器壁上给定边界条件下向列相介质平衡方程的精确解. 但是它们不是该问题的唯一解. 它们只是在平面范畴的唯一解. 假如我们放弃关于矢量 $\boldsymbol{n}$ 处处都在垂直于容器轴的平截面上分布的假定,则也可能有其它的解,并且在轴上没有奇异性. 例如,如果边界条件要求 $\boldsymbol{n}$ 与容器壁垂直,则在这样的解中,指向矢的流线在子午面上的分布就没有奇异性,并且具有在图 30 上表示的形状. 在壁上,与其垂直的流线开始弯曲,趋向于 $r=0$ 的轴,因而在轴上 $\boldsymbol{n}$ 的方向是完全确定的. 此外,我们看到,在这样的解中,与在轴上有奇异性的解相比较,无奇异性使其在热力学上更为有利(总弹性自由能更小)(P. E. Cladis, M. Kleman, 1972). 现在让我们着手构造这个解.

我们将在圆柱坐标 r,φ,z 中,寻求沿着 z 轴的对称解,其解的形式为

$$n_r=\cos\chi(r),\quad n_\varphi=0,\quad n_z=\sin\chi(r) \tag{38.1}$$

(角 χ 的意义表示在图 30 上). 在壁上的边界条件:当 $r=R$ 时

$$\chi=0, \tag{38.2}$$

(R 是圆柱容器的半径),而在轴上我们提出条件:当 $r=0$ 时

$$\chi=\pi/2, \tag{38.3}$$

如已经指出的那样,符合无奇异性,我们有

$$(\nabla\times\boldsymbol{n})_\varphi=-\frac{\mathrm{d}n_z}{\mathrm{d}r}=-\cos\chi\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r},$$

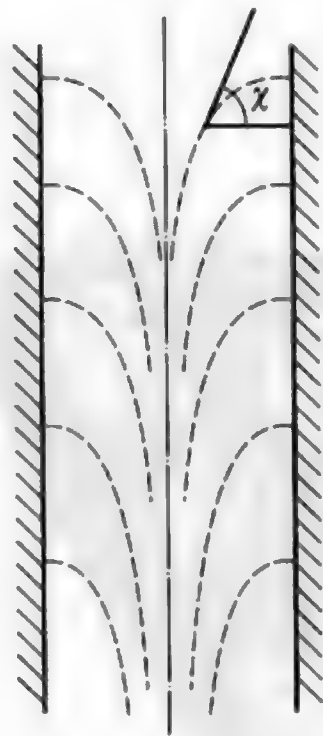


图 30

$$\nabla \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rn_r)}{\mathrm{d}r} = -\sin\chi\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r} + \frac{\cos\chi}{r}.$$

形变自由能(在沿 z 轴的每单位长度上)由如下积分给出:

$$\int_0^R 2\pi r F_d \mathrm{d}r = \pi\int_{-\infty}^{\ln R}\{(K_1\sin^2\chi + K_3\cos^2\chi)\chi'^2 + K_1\cos^2\chi - K_1\sin 2\chi\cdot\chi'\}\ \mathrm{d}\xi, \tag{38.4}$$

式中的撇号′表示对变量 $\xi = \ln r$ 的求导①.

平衡方程的第一个积分(亦即关于泛函(38.4)最小值变分问题的欧拉方程):

$$(K_1\sin^2\chi + K_3\cos^2\chi)\chi'^2 - K_1\cos^2\chi = \text{const}. \tag{38.5}$$

按照条件(38.3),应有:当 $\xi \to -\infty$ 时,$\chi\to\pi/2$;显然,对此应有:当 $\chi\to\pi/2$ 时,$\chi'\to 0$. 因此 const $=0$,所以

$$\chi' = -\frac{\sqrt{K_1}\cos\chi}{(K_1\sin^2\chi + K_3\cos^2\chi)^{1/2}}.$$

由此得到所求的满足条件(38.2)的解:

$$\ln\frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{K_1}}\int_0^{\chi}\frac{(K_1\sin^2\chi + K_3\cos^2\chi)^{1/2}}{\cos\chi}\mathrm{d}\chi. \tag{38.6}$$

与向错(37.10)相反,该解不是自相似的:在其中引入了长度 R 的尺寸参数. 式(38.6)的积分是通过初等函数表示的. 假定 $K_3 > K_1$,我们写出答案:

$$\frac{r}{R} = \left\{\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi} - k'\sin\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi} + k'\sin\chi}\right\}^{1/2}\exp\left\{-\frac{k}{k'}\arcsin(k\sin\chi)\right\}, \tag{38.7}$$

$$k^2 = \frac{K_3 - K_1}{K_3},\quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{K_1}{K_3},$$

当 $r\to 0$ 时,差 $\pi/2-\chi$ 与 r 的一次幂成比例地趋于零,而流线按照指数规律 $r\propto\exp(\text{const}\cdot z)$ 逼近 z 轴.

计算给出与该解答有关的自由能:

$$\int_0^R F_d 2\pi r\mathrm{d}r = \pi K_1\left\{2 + \frac{1}{kk'}\arcsin k\right\}. \tag{38.8}$$

我们注意到,该表达式与容器的半径 R 是无关的. 而向错的能量(图27(a);解(37.10)):

$$\int_0^R 2\pi r F_d\mathrm{d}r = \pi K_1 L, \tag{38.9}$$

式中 $L = \ln(R/a)$ 是较大的对数,它的产生与在轴上的奇异性有关. 我们看到,

① 在被积表达式的最后一项,对于表示变分问题是不重要的,但是对于计算总自由能是必须的.

与有奇异性的解相比较,没有奇异性的解在能量方面更有好处(如果系数 K_1 不是反常小的话).

这里所研究的平衡方程的轴对称无奇异性解场 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$,也可以从 $n=1$ 并连续(即没有任何的间断发生)形变的向错场 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 得到,亦即在连续形变中 $\boldsymbol{n}$ 从 $z=\text{const}$ 的平面逐渐离开而得到. 这种奇异性是非常普遍情况的表现,将在下一节阐明.

习 题

习题 1 试求在圆柱形容器中的向列相介质,其平衡方程在轴上没有奇异性的轴对称解;边界条件符合图 27(b).

解: 寻求解的形式为

$$n_r=0,\quad n_\varphi=\cos\chi(r),\quad n_z=\sin\chi(r)$$

具有边界条件

$$\chi(R)=0,\quad \chi(0)=\frac{\pi}{2}.$$

我们有

$$(\nabla\times\boldsymbol{n})_\varphi=-\cos\chi\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r},(\nabla\times\boldsymbol{n})_z=\frac{\cos\chi}{r}-\sin\chi\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r},\nabla\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

自由能为

$$\int_0^R 2\pi rF_d\mathrm{d}r=\pi\int_{-\infty}^{\ln R}\{K_2(\sin\chi\cos\chi-\chi')^2+K_3\cos^4\chi\}\,\mathrm{d}\xi.$$

平衡方程的第一次积分为

$$K_2\chi'^2-(K_2\sin^2\chi\cos^2\chi+K_3\cos^4\chi)=0.$$

积分该方程得到如下结果(假设 $K_3>K_2$):

$$\frac{r}{R}=\left\{\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}-k'\sin\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}+k'\sin\chi}\right\}^{1/2},\quad k^2=\frac{K_3-K_2}{K_3},\quad k'^2=\frac{K_2}{K_3}.$$

当 $r\to0$ 时,角 $\chi\to\pi/2$,按如下规律变化:

$$\frac{\pi}{2}-\chi=2k'\frac{r}{R}.$$

这一形变的自由能为

$$\int_0^R 2\pi rF_d\mathrm{d}r=\pi K_2\left\{2+\frac{1}{kk'}\arcsin k\right\},$$

而在图 27(b)上的平面(二维)向错的自由能为 πK_3L.

习题 2 试探讨具有指标 $n=1$ 的向错,在形为 $\delta\boldsymbol{n}(\varphi)$ 较小扰动下的稳定性(阿尼西莫夫(С. И. Анисимов),加洛辛斯基(И. Е. Дзялошинский),1972).

解: 1. 无扰动径向向错场(图 27(a)): $n_r=1,n_\varphi=n_z=0$. 而扰动场可写为

$$n_r = \cos\theta\cos\Phi \approx 1 - \frac{1}{2}(\theta^2 + \Phi^2),\quad n_\varphi = \cos\theta\sin\Phi \approx \Phi,\quad n_z = \sin\theta \approx \theta,$$

式中的角 θ 和 Φ 是角坐标 φ 的函数. 与该扰动有关的能量为

$$\int F_d r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{R^2}{4}\int\{K_1\Phi'^2 + K_2\theta'^2 + (K_3 - K_1)\Phi^2 - K_1\theta^2\}\mathrm{d}\varphi.$$

为了进行一般性的研究,应置

$$\theta(\varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty}\theta_s \mathrm{e}^{is\varphi},\quad \Phi(\varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty}\Phi_s \mathrm{e}^{is\varphi},$$

并将能量表示为所有 θ_s, Φ_s 的函数. 由此立即看出,所研究的向错对于 θ_0(能量中的 $-K_1\theta_0^2$ 项)的扰动总是不稳定的.

2. 环向向错场(图 27(b)):$n_r = n_z = 0, n_\varphi = 1$. 扰动向错场可写为

$$n_r = \cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Phi\right) \approx -\Phi,\quad n_\varphi = \cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Phi\right) \approx 1 - \frac{1}{2}(\theta^2 + \Phi^2),\ n_z = \sin\theta \approx \theta$$

(比较前面的情形,这里角 Φ 的确定是不同的). 相应的能量为

$$\int F_d r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{R^2}{4}\int\{K_3(\theta'^2 + \Phi'^2) + (K_1 - K_3)\Phi^2 + (K_2 - 2K_3)\theta^2\}\mathrm{d}\varphi.$$

最"危险"的扰动角是 θ_0 和 Φ_0. 对于这些扰动的稳定性条件是

$$K_1 > K_3,\quad K_2 > 2K_3.$$

由本题和习题 1 得到结论:在具有 $n = 1$ 的向错中,形变自由能超过无奇异轴对称解的能量,这就表示这些向错在较好的情形下也只能是亚稳定状态. 现在我们看到,径向向错一般是不稳定的,而环向向错在弹性模量之间保持一定关系时是稳定的(对于指出的扰动).

习题 3 设向列相介质充满两个平行平面之间的空间;边界条件:表面上的指向矢,在一个平面上要求垂直,在另一个平面上要求平行. 试确定 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 的平衡位形.

解:显然,平衡位形是平面(二维的). 我们取该平面作为 xz 平面,z 轴垂直两个边界面($z = 0$ 和 $z = h$ 的平面). 假定

$$n_x = \sin\chi(z),\quad n_z = \cos\chi(z).$$

形变自由能为

$$\int F_d \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int\{K_1\sin^2\chi + K_2\cos^2\chi\}\chi'^2\mathrm{d}z.$$

平衡方程的第一次积分:

$$(K_1\sin^2\chi + K_2\cos^2\chi)\chi'^2 = \mathrm{const},$$

由此,考虑到边界条件

$$\int_0^{\chi}(K_1\sin^2\chi + K_2\cos^2\chi)^{1/2}\mathrm{d}\chi = \frac{z}{h}\int_0^{\pi/2}(K_1\sin^2\chi + K_2\cos^2\chi)^{1/2}\mathrm{d}\chi,$$

或

$$z = h\frac{E(\chi,k)}{E(\pi/2,k)}, \quad k^2 = \frac{(K_2 - K_1)}{K_1},$$

式中的 $E(\chi,k)$ 是第二类椭圆积分.

§39　向错的拓扑性质

在 §37 给出的弗兰克指标定义,本质上与假定向错形变的平面(二维)特性和沿着向错长度均匀分布的特性有关. 现在我们来说明,用什么样的方法可以把这一概念引入向列相介质任意曲线向错的一般情形.

当向错所有点上的指向矢同时作任意旋转时,向列相的能量不改变. 在这个意义上,可以说,向列相的状态对于指向矢的方向是退化的. 这些方向起着**退化参数**的作用. 我们引入**退化空间**的概念,这里的所谓退化空间就是容许退化参数变化而没有能量变化的区域. 在现在的情形下,这个退化空间就是一个单位半径的球面,在该球面上的每一点都对应 $\boldsymbol{n}$ 的一定方向. 但是还应该考虑,用改变 $\boldsymbol{n}$ 的符号来区分的向列相状态在物理上是相同的. 换句话说,在球直径相对的两点,物理上是等价的. 因而,向列相的退化空间是球,在球的每个直径上相对的两点是等价的①.

我们设想,在向列相的物理(实际)体积内,环绕位于其中的向错线作一个闭合回路(把它称为 γ 回路),这时我们跟随矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向绕行,在退化空间(即球上)描绘这个点也画出一条闭合回路(把它称为 Γ 回线). 在这里必须区分两种不同的情况.

其中的一种情况,Γ 是真正意义上的闭合回路. 返回到它原来的状态,表示点所描述的是 n 为整数的回路(比如,对于图 31 上的 Γ_1 和 Γ_2 回路,此数对应 $n=1$ 和 $n=2$). 这个数也称为整数弗兰克指标.

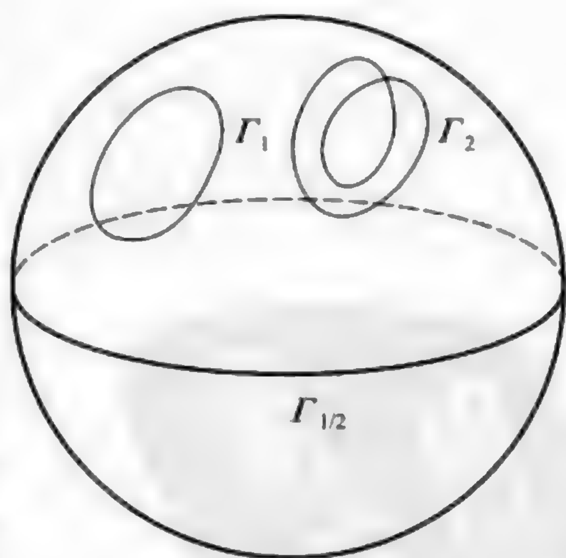


图 31

另一种情况,Γ 从球上的某点出发,在直径的相对点上结束. 由于在直径相对两点的等价性,这样的回路也应该看作是“闭合的”. 这时所描绘的点画出的是弗兰克指标定义为半整数的“回路”(比如,对于半圆周 $\Gamma_{\frac{1}{2}}$,此数 $n=\frac{1}{2}$.).

① 这一几何学方法与拓扑学中的所谓投影平面是一致的.

在球表面上任意的闭合回路，都可以用连续（即没有间断的回路）形变的方法变成为另外一个任意的闭合回路. 此外，任意的闭合回路还可以连续的收缩到一点①.

同样也能够把在球直径上相对两点开始和终止的回路中的一个变成另一个任意的回路. 但是，这样的回路不能够集中到一点：在形变时，回路的两端可能移动，但这时只能保持在球的任何一个直径的两端上.

因而，弗兰克指标不是拓扑不变量. 只有在弗兰克指标为整数或半整数时才是拓扑不变量.

由上述分析得出结论：在向列相介质中的全部向错共分为两类，其中每一类中的所有向错都是拓扑等价的，即能够用 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 场连续形变的方法将其中的一个变成另一个（阿尼西莫夫（С. И. Анисимов）和加洛辛斯基（И. Е. Дзялошинский），1972）. 其中一类向错是由整数弗兰克指标组成的，并且这些向错在拓扑上是不稳定的，即它们一般地能够用连续形变的方法消除. 整数指标的向错可以在向列相体积内结束.

另一类向错是由半整数弗兰克指标组成的. 这些向错是不能消除的，并且它们在拓扑上是稳定的.

关于拓扑上的等价结构问题，事实上应在某种具体的由这些结构在热力学上比较有利来确定的条件下实现. 这个问题不在拓扑分析的范围之内.

在向列相介质中，除了线奇异性——向错之外，同时还可以存在点奇异性. 这种奇异性最简单的例子是矢量 $\boldsymbol{n}$ 从一个点向所有的方向辐射（像一个“刺猬”一样）.

为了阐述点奇异性的拓扑分类，我们重新返回到作为退化空间的单位球的映射上. 在充满向列相的物理空间内，选取两个点 A 和 B，并环绕奇点 O 用某一回路 γ 连接起来，如图 32 所示. 回路 γ 与单位球上的某个回路 Γ 相对应. 我们现在将回路 γ 绕直线 AB 旋转，转满一圈后回路自然的结合在一起，它在物理空间内画出一个闭合曲面 σ. σ 的映射 Σ 是由回路 Γ 画出来并覆盖在单位球上的，覆盖的次数可能大于 1. 映射 Σ 覆盖单位球的数次 N 是奇点的拓扑特征. 映射 Σ 可以想象为在球上拉紧的闭合薄膜. 显然，无论如何也不可能（在它上面不能产生任何裂缝的情形下）把它收缩成一个点. 这些就表现出奇点的不可消除性. 如果 $N=0$，

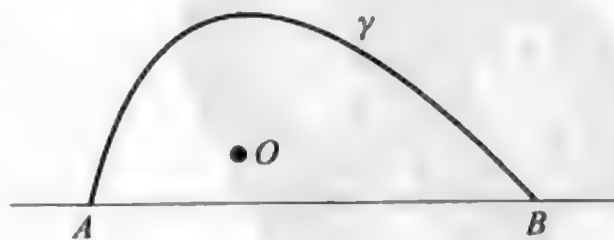


图 32

① 回路的形变不仅反映 γ 回路自身在物理空间的变化，而且反映 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 场本身的变化.

则薄膜一般不能把球完全包围起来. 这相应于没有奇点或者奇点可以消除(亦即,薄膜可以收缩成为点). 对于向列相中的奇点,N 的符号没有意义:它的变化仅仅表示,在整个空间里 $\boldsymbol{n}$ 的方向向相反方向变化,并没有影响到向列相状态的改变.

描述点奇异性的数 N,只可能是整数. 不难看出,半整数的 N,实际上表示存在不可消除的线奇异性,而不是点奇异性. 比如,如果 Σ 覆盖球的一半($N = 1/2$),那么这就意味着,在 γ 上观察到的任何一个点,我们都能够找到它的映射在球面上描绘出的形如 $\Gamma_{1/2}$ 的回路(图 31),这也就证明了关于弗兰克指标 $n = \frac{1}{2}$ 时存在不可消除的向错[①].

鉴于在向列相中奇异性拓扑性质的讨论,让我们简短地讲述一下位错(即晶格中的奇异线)的拓扑解释. 设想一无边界的晶格,并沿着三个基本晶格周期的方向引入坐标轴 x_1, x_2, x_3. 设这些周期的大小分别为 a_1, a_2, a_3. 当晶格沿 x_1, x_2, x_3 轴平行移动任一距离时,晶格的能量不变. 退化参数(移动量)变化的范围是线段长度 a_1, a_2, a_3,而且每一个线段它的两个端点被看作是等价的(因为晶格按周期移动使晶格自相结合,亦即保持晶格状态恒定不变). 在拓扑学上,具有等价端点的线段跟圆周是一样的. 这样一来,晶格的退化空间就是在三个圆周上构造的三维区域. 这个区域可以想象为对立面两两等价的立方体或如四维空间中的一个三维环形曲面[②]. 在这样的环形曲面上,不存在收缩成点的回路 Γ(其中的每一个回路都是由三个整数拓扑不变量 n_1, n_2, n_3——即环绕环形曲面的三个圆周母线的数来描述的). 如果回路 Γ 是回路 γ(在物理空间中环绕奇异线——位错的回路)的映像,则它的三个常数跟伯格斯矢量(用对应的周期 a_1, a_2, a_3 作为度量单位)的三个分量完全一样. 这样一来,在拓扑上位错是稳定的不可消除的奇异线,而它的伯格斯矢量是拓扑不变量.

§40　向列相液晶的运动方程

运动向列相介质的状态,取决于四个量——指向矢 $\boldsymbol{n}$,质量密度 ρ,速度 $\boldsymbol{v}$ 和熵密度 S 的空间分布. 因此,向列相运动的完全流体动力学方程组是由上述量对时间之导数确定的四个方程组组成的(J. L. Eriksen, 1960; F. M. Leslie, 1966)[③].

---

① 在整数 N 时,类似地论证不会导致相似的结论,因为指标为整数的向错是可以消除的,而具有整数 N 的映射与不可消除的奇异点相对应.

② 像对边两两等价的正方形在拓扑上等价于三维空间中的二维环面一样.

③ 部分地,我们可参见以下作者的论述:D. Forster, T. C. Lubensky, P. C. Martin, J. Swift 和 P. S. Pershan, 1971.

我们从指向矢方程开始. 如果向列相处于平衡(因而 $\boldsymbol{h}=0$)并在空间以不变的速度作整体运动,则该方程只不过是表示指向矢 $\boldsymbol{n}$ 以同样的速度在空间转移这样的事实. 换句话说,流体的每一个质点都带着自己的 $\boldsymbol{n}$ 在空间运动. 这就表示对时间的全导数(即通常说的物质导数或随体导数)等于零

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{n}=0. \tag{40.1}$$

在任意运动的一般情形下,在方程的右端出现与 $\boldsymbol{h}$ 以及速度对坐标导数的有关项. 在第一次不为零的流体动力学近似时必须局限于这些量的线性项. 导数 $\partial v_i/\partial x_k$ 是张量,它可以分解为对称和反称两部分:

$$v_{ik}=\frac{1}{2}(\partial_i v_k+\partial_k v_i),\quad \Omega_{ik}=\frac{1}{2}(\partial_i v_k-\partial_k v_i). \tag{40.2}$$

为了建立与 Ω_{ik} 的关系,要充分注意,当向列相作为整体以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 均匀旋转时,整个 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 场也将以同样角速度旋转. 这样的旋转由下面的方程描述:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t}=\Omega_{ki}n_k.$$

实际上,作为整体旋转时物体上各点的速度是 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$,因而 $\nabla\times\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\Omega}$,对于指向矢的变化速度也得到类似的表达式 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{n}$. 由于平方 $\boldsymbol{n}^2=1$ 是常数,与 v_{ik} 有关的项,应考虑要求由 $\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}/\mathrm{d}t=0$ 的项组成. 因而,得到如下的一般形式的"指向矢的运动方程":

$$\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t}=\Omega_{ki}n_k+\lambda(\delta_{il}-n_in_l)n_kv_{kl}+N_i, \tag{40.3}$$

式中①

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{h}/\gamma. \tag{40.4}$$

项 $\boldsymbol{N}$ 描述的是在分子场作用下指向矢对于平衡的弛豫,而式(40.3)中的第二项描述的是速度梯度在指向矢上的取向作用. 各项中的系数 γ(具有黏度的量纲)和系数 λ(量纲为1)是动理学(而不是热力学)性质的系数②.

流体密度对时间导数的方程是连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0. \tag{40.5}$$

---

① 引入符号 $\boldsymbol{N}$,是为了下面更清楚的显示一些公式的结构,同样也由于在后面的§43更进一步的推广.

② 在方程(40.3)的右端,存在带有密度和熵(或温度)的梯度项,它们与方程关于空间反演的不变性和关于 $\boldsymbol{n}$ 变号的不变性有关. 关于这一问题更详细的叙述见§43.

注意，这些方程本质上是把流体动力学的速度作为单位质量的**物质流密度**来确定的[①].

速度对时间导数的方程是动力学方程

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F},\tag{40.6}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 是作用在单位体积上的应力之合力. 根据在 §2 中论述的一般结论，它可以表示为张量散度的形式：

$$F_i=\partial_k\sigma_{ik},$$

式中 σ_{ik} 是应力张量. 于是，动力学方程可写为

$$\rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\equiv\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v_i\right)=\partial_k\sigma_{ik}.\tag{40.7}$$

应力张量的形式将在后面建立.

最后，还剩下熵方程. 在无耗散过程的情形下，流体的运动是绝热的，并且在流体的每一个单元里也都是绝热的，它们都带着自己固定的熵值移动. 将表示熵守恒的方程写成普通连续性方程的形式：

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\nabla\cdot(S\boldsymbol{v})=0,$$

式中 S 是单位体积的熵，而 $\boldsymbol{v}S$ 是**熵流密度**[②]. 在考虑耗散过程时，熵方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\nabla\cdot\left(S\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right)=\frac{2R}{T}.\tag{40.8}$$

这里 R 就是所谓的耗散函数. $2R/T$ 定义为**熵增速度**[③]，它是由张量分量 v_{ik}，矢量 $\boldsymbol{h}$ 和温度梯度 ∇T 组成的二次式. 而矢量 $\boldsymbol{q}$ 是与热传导有关的热流密度，该矢量的分量是温度梯度矢量之分量的线性函数

$$q_i=-\kappa_{ik}\partial_kT.\tag{40.9}$$

在向列相介质中，热导率张量 κ_{ik} 有两个独立分量并可以表为

$$\kappa_{ik}=\kappa_{\parallel}n_in_k+\kappa_{\perp}(\delta_{ik}-n_in_k),\tag{40.10}$$

式中 $\kappa_{\parallel}$ 和 $\kappa_{\perp}$ 描述纵向和横向（关于 $\boldsymbol{n}$ 的）导热性.

在流体动力学中，熵守恒定律表示为如下形式的方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho\boldsymbol{v}^2}{2}+E\right)+\nabla\cdot\boldsymbol{Q}=0,\tag{40.11}$$

---

① 物质流密度定义为单位时间流过单位横截面的质量. ——译者注

② 这个方程可以表示为等价形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{S}{\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S}{\rho}\right)+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\left(\frac{S}{\rho}\right)=0,$$

它表示移动的流体质点相对于单位质量的熵是不变的.

③ 函数 $2R$ 给出（像在 §33 一样）机械能耗散速度（比较第六卷，§79）.

式中 E 是内能密度，而 $\boldsymbol{Q}$ 是能流密度. 内能密度 $E=E_0+E_d$，其中 $E_0(\rho,S)$ 是对未形变均匀介质的，而 E_d 与未知场 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 有关. 按照 §36 末尾所说的，E_d 与式(36.1)中的自由能 F_d 是一样的，其差别只在于弹性模量 K_1,K_2,K_3 所指的是用密度和熵而不是温度来表示.

自然，能量守恒定律包含在运动方程之中. 我们利用它来建立前面引进的函数 R，张量 σ_{ik} 和矢量 $\boldsymbol{N}$ 之间的关系.

将方程(40.11)中关于时间的导数展开，并考虑到热力学关系

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{\rho,\boldsymbol{n}}=T,\quad \left(\frac{\partial E}{\partial \rho}\right)_{S,\boldsymbol{n}}=\mu,$$

式中 μ 为**化学势**①. 于是有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho\boldsymbol{v}^2}{2}+E\right)=\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\,\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\mu\frac{\partial\rho}{\partial t}+T\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,S}. \qquad (40.12)$$

我们把最后一项分出来考虑，从式(36.6)中引入记号 Π_{ki}，则有

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,S}=\left(\frac{\partial E_d}{\partial n_i}\right)_{\rho,S}\frac{\partial n_i}{\partial t}+\Pi_{ki}\partial_k\frac{\partial n_i}{\partial t}=$$

$$=\left\{\frac{\partial E_d}{\partial n_i}-\partial_k\Pi_{ki}\right\}\frac{\partial n_i}{\partial t}+\partial_k\left(\Pi_{ki}\frac{\partial n_i}{\partial t}\right)=-\boldsymbol{h}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial t}+\partial_k\left(\Pi_{ki}\frac{\partial n_i}{\partial t}\right)$$

(在这里用 $\boldsymbol{h}$ 代替 $\boldsymbol{H}$，是因为 $\boldsymbol{H}$ 的纵向部分由于 $\boldsymbol{n}\cdot\partial\boldsymbol{n}/\partial t=0$ 而立刻消失). 由式(40.3)将 $\partial\boldsymbol{n}/\partial t$ 代入这里，写为

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,S}=(v_k\partial_k n_i+\Omega_{ik}n_k-\lambda v_{ik}n_k)h_i-\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{h}+\nabla\cdot(\cdots),$$

然后再分出一个全散度，则有

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,S}=-\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{v}-\frac{1}{\gamma}h^2+\nabla\cdot(\cdots), \qquad (40.13)$$

式中

$$G_i=-h_k\partial_i n_k+\frac{1}{2}\partial_k(n_ih_k-n_kh_i)-\frac{\lambda}{2}\partial_k(n_ih_k+n_kh_i). \qquad (40.14)$$

在这里和底下，为了减缩烦琐的公式，在散度符号下面，我们没有写出完整的表达式. 该项(等我们在本节最后再返回来)对于提供问题的解是不重要的.

表达式(40.14)可以表示为

---

① 我们着重指出，E 是属于给定的(单位)体积的，在该体积内的质点(分子)数 N 是变化的. 在第五卷内各处的化学势是关于一个质点的，亦即定义为 $\mu=\frac{\partial E}{\partial N}$. 因为 $N=\frac{\rho}{m}$(m 是分子质量)，故这里通常的定义跟第五卷里的定义不同之处只是因子 m. 为了避免误解，在跟热力学关系式(3.2a)相比较时要注意，严格地说，这里的 E 是单位体积的内能，但是，在 §3 中，能量 ε 被定义为未形变物体单位体积内物质的能量.

$$G_i = \partial_k \sigma_{ik}^{(r)} + (\partial_i E_d)_{\rho,S}, \tag{40.15}$$

式中

$$\sigma_{ik}^{(r)} = -\Pi_{kl}\partial_i n_l - \frac{\lambda}{2}(n_i h_k + n_k h_i) + \frac{1}{2}(n_i h_k - n_k h_i). \tag{40.16}$$

在变换时利用了等式

$$(\partial_i E_d)_{\rho,S} = \frac{\partial E_d}{\partial n_k}\partial_i n_k + \Pi_{lk}\partial_i\partial_l n_k.$$

应力张量 $\sigma_{ik}^{(r)}$ 的确定不是唯一的：当对 $\sigma_{ik}^{(r)}$ 增加任何形为$\partial_l \chi_{ilk}$（其中χ_{ilk}是关于后一对指标反称的任意张量，即 $\chi_{ilk} = -\chi_{ikl}$）的项时，表达式(40.15)不变. 虽然张量(40.16)不是对称的，但是可以导入对称形式，这只需对其增加一项经过适当选择的张量χ_{ilk}. 事实上，实施此项十分烦琐，我们把运算放在本节的最后，而现在继续推导运动方程，假设 $\sigma_{ik}^{(r)}$ 已经加上了使之对称的项.

将式(40.15)代入(40.13)，并单独的分离出全散度项（考虑 $\sigma_{ik}^{(r)}$ 的对称性），我们得到①：

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,S} = -\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{h} + \sigma_{ik}^{(r)} v_{ik} - (\partial_i E)_{\rho,S} v_i + \nabla\cdot(\cdots). \tag{40.17}$$

最后将出现在式(40.5)，(40.7)，(40.8)和(40.17)中对时间的导数代入式(40.12)，并根据式

$$\partial_i E = (\partial_i E)_{\rho,S} + \mu\partial_i\rho + T\partial_i S$$

将 E 的偏导数（在固定 ρ 和 S 时）用全导数表示. 经过一系列变换（分离出全散度）后，最终我们得到：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho \boldsymbol{v}^2}{2} + E\right) = -\sigma'_{ik} v_{ik} - \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{h} + \frac{1}{T}\boldsymbol{q}\cdot\nabla T + 2R + \nabla\cdot(\cdots), \tag{40.18}$$

式中 σ'_{ik}与 σ_{ik} 相关联的公式为

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma_{ik}^{(r)} + \sigma'_{ik}, \tag{40.19}$$

根据热力学的定义，引入压力

$$p = \rho\mu - E + TS \tag{40.20}$$

（$\rho\mu = \Phi$ 是物质单位体积的热力学势），并且应该由它们来确定应力张量的各向同性部分.

将式(40.18)跟能量守恒方程(40.11)比较，我们发现

$$2R = \sigma'_{ik} v_{ik} + \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{h} - \frac{1}{T}\boldsymbol{q}\cdot\nabla T. \tag{40.21}$$

该函数确定了由耗散过程引起的熵增. 因此，很明显，在式(40.19)中引入的张

---

① 因为 $E_0 = E_0(\rho, S)$，所以 $(\partial_i E_d)_{\rho,S} = (\partial_i E)_{\rho,S}$.

量 σ'_{ik} 是应力张量的耗散（"黏性"）部分．而张量 $\sigma^{(r)}_{ik}$ 没有进入式(40.21)内，它是应力张量的非耗散(除了与压力有关外)部分①，是向列相(不同于通常的)流体的特殊部分．

同时，我们也注意到，在耗散函数中没有出现系数 λ．虽然这一量纲为 1 的系数表示的作用显然是动理学(而不是热力学)的性质，但它不是耗散的②．

在运动着的向列相介质中体力密度

$$F_i = -\partial_i p + \partial_k \sigma^{(r)}_{ik} + \partial_k \sigma'_{ik} \equiv -\partial_i p + F^{(r)}_i + F'_i.$$

在静止平衡(虽然也形变)的介质中 $\boldsymbol{F}'=0$，而根据平衡条件(36.7)有 $\boldsymbol{h}=0$．按照式(40.14)，(40.15)，此时力

$$\boldsymbol{F}^{(r)} = -(\nabla E_d)_{\rho,S}, \boldsymbol{F} = -\nabla p - (\nabla E_d)_{\rho,S}.$$

如果认为弹性模量是常数，与 ρ 和 S 量无关，则 $(\nabla E_d)_{\rho,S} = \nabla E_d$，并且这时力 $\boldsymbol{F} = -\nabla(p+E_d)$．但是，在平衡时，必须同时有 $\boldsymbol{F}=0$．由此可见，(在所指出的假设情形时)在处于平衡向列相介质中的压力分布由下面的公式给出③：

$$p = \text{const} - E_d. \tag{40.22}$$

现在，我们以显形式进行前面提到的张量 $\sigma^{(r)}_{ik}$ 的对称化运算．首先以显形式计算该张量的反称部分．在计算张量 $\sigma^{(r)}_{ik} - \sigma^{(r)}_{ki}$ 时，应该顾及到表达式

$$B_{ik} = \frac{\partial E_d}{\partial n_i} n_k + \Pi_{li}\partial_l n_k - \Pi_{kl}\partial_i n_l,$$

该式关于指标 i,k 对称，这一对称性不易直接验证．更简单的是用间接方法，即利用能量 E_d，它是个标量，并且它本身关于坐标系任意旋转是不变的．在无限小的旋转角 $\delta\varphi$ 时，坐标变换为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}, \quad \delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r},$$

亦即

$$\delta x_i = \varepsilon_{ik} x_k, \quad \varepsilon_{ik} = e_{ilk}\delta\varphi_l = -\varepsilon_{ki}.$$

对于矢量 $\boldsymbol{n}$ 和张量 $\partial_k n_i$ 的变化，相应的有

$$\delta n_i = \varepsilon_{il} n_l, \quad \delta(\partial_k n_i) = \varepsilon_{il}\partial_k n_l + \varepsilon_{kl}\partial_l n_i.$$

此时，在旋转时函数 E_d 的不变性就意味着 $B_{ik}\varepsilon_{ik}=0$．因为 ε_{ik} 是任意的反称张量，故由此得到 B_{ik} 必是对称张量，也就得到了需要的证明．

---

① 有时也把它称为反作用(无效功)部分(由此，我们用指标(r)表示它)．

② 这种情况不是唯一的：我们注意到电动力学中导体的霍尔(Hall)效应，它也与耗散无关．

③ 如果没有作前面所指出的假设，则在固定温度时，力 $\boldsymbol{F}$ 可以表示为 $\boldsymbol{F} = -\rho\nabla\mu$，因而，平衡条件归结为通常的 $\mu = \text{const}$．实际上，将表达式(40.20)对压力求微分，并考虑到热力学关系式 $\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S + \mu\mathrm{d}p + (\mathrm{d}E_d)_{\rho,S}$，即可求得 $-\nabla p = -\rho\nabla\mu - S\nabla T + (\nabla E_d)_{\rho,S}$，由此，当 $T=\text{const}$ 时，即得到上面指出的关于 $\boldsymbol{F}$ 的表达式．

注意，由张量

$$\varphi_{ikl}=n_i\Pi_{lk}-n_k\Pi_{li},$$

容易将张量 $\sigma_{ik}^{(r)}$ 的反称部分化为式(2.11)的形式. 然后，对称张量 $\sigma_{ik}^{(r)}$ 可直接由公式(2.13)求出. 经过一些简化之后我们得到

$$\sigma_{ik}^{(r)}=-\frac{\lambda}{2}(n_ih_k+n_kh_i)-\frac{1}{2}(\Pi_{kl}\partial_in_l+\Pi_{il}\partial_kn_l)-$$
$$-\frac{1}{2}\partial_l[(\Pi_{ik}+\Pi_{ki})n_l-\Pi_{kl}n_i-\Pi_{il}n_k]. \qquad (40.23)$$

我们注意到，该表达式实际上只包含张量 Π_{ik} 的横向(与指标 k 有关的)分量. 如果最后表为如下的形式：

$$\Pi_{ik}=\Pi_{ik}^{(t)}+\Pi_{il}n_kn_l$$

(因而 $\Pi_{ik}^{(t)}n_k=0$)，则在式(40.23)中只剩下带有 $\Pi_{ik}^{(t)}$ 的项.

最后，我们回到带有全散度的项，这一项直到现在还没有写出来. 比较式(40.18)和(40.11)，我们看到位于散度符号(即∇·)下面的表达式，在该项的总和中是能流密度. 这样一来，在这里我们引入所得到的最终结果：

$$Q_i=\left(W+\frac{v^2}{2}\right)v_i-\Pi_{ik}[-v_l\partial_ln_k+\Omega_{lk}n_l+\lambda n_l(v_{kl}-n_kn_mv_{lm})]+$$
$$+\frac{1}{2}(n_ih_k-n_kh_i)v_k+\frac{\lambda}{2}(n_ih_k+n_kh_i)v_k-\sigma'_{ik}v_k-\kappa_{ik}\partial_kT, \quad (40.24)$$

式中 $W=p+E$ 是热函数. 第一项跟普通流体在流体动力学中的能流表达式是一样的.

§41 向列相液晶的耗散系数

在运动方程中，带有 N 和 σ'_{ik} 的项表示由于介质偏离热力学平衡引起的弛豫过程，热力学不平衡又与 $\boldsymbol{h}$ 和 v_{ik} 的值不为零有关. 在普通流体动力学的近似中，假设这一不平衡性是微弱的，即在一定意义上，$\boldsymbol{h}$ 和 v_{ik} 的值是小的. 于是，σ'_{ik} 就是它们的线性函数.

但是，在通常情形下，所写运动方程的形式，在 σ'_{ik} 中与 $\boldsymbol{h}$ 有关的项我们不需要写出来. 实际上，由 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的分量组成的这些项也具有 $\text{const}\cdot(n_ih_k+n_kh_i)$ 的形式. 然而，这种形式的项，在式(40.23)的应力张量 $\sigma_{ik}^{(r)}$ 的非耗散部分中已经有了. 因此，在 σ'_{ik} 中增加的类似形式的项刚好归结为重新定义的系数 λ 中.

张量 σ'_{ik} 与 v_{ik} 线性关系的一般形式：

$$\sigma'_{ik}=\eta_{iklm}v_{lm}, \qquad (41.1)$$

而且四阶张量 η_{iklm} 具有明显的对称性质(由于 σ'_{ik} 与 v_{ik} 都是对称张量的结果)：

$$\eta_{iklm}=\eta_{kilm}=\eta_{ikml}. \tag{41.2}$$

此外,由昂萨格(Onsager)动理系数对称一般原理的结果,这个张量还具有更多的对称性(参见第五卷,§120;像在§32一样,在这一节的下面,我们将利用在第六卷§59给出的该原理的公式和在那里引用的 x_a 和 X_a 的定义). 由熵增速度表达式 $2R/T$ 可以看出①,如果把 $\dot{x}_a$ 理解为张量 σ'_{ik} 的分量,则与其"热力学共轭"的量 X_a 就是张量 $-v_{lm}/T$ 的分量②. 张量 η_{iklm} 的分量起着动理系数 γ_{ab} 的作用. 昂萨格原理要求 $\gamma_{ab}=\gamma_{ba}$,亦即

$$\eta_{iklm}=\eta_{lmik}. \tag{41.3}$$

考虑到所提到的对称性质,张量 η_{iklm} 只应该由单位张量 δ_{ik} 和矢量 $\boldsymbol{n}$ 来构成,这样线性无关的组合总共有五个:

$$n_in_kn_ln_m,\quad n_in_k\delta_{lm}+n_ln_m\delta_{ik},$$
$$n_in_l\delta_{km}+n_kn_l\delta_{im}+n_in_m\delta_{kl}+n_kn_m\delta_{il},$$
$$\delta_{ik}\delta_{lm},\quad \delta_{il}\delta_{km}+\delta_{kl}\delta_{im}.$$

相应的张量 η_{iklm} 有五个独立分量. 利用它们组合的应力张量可以表为③

$$\sigma'_{ik}=2\eta_1v_{ik}+(\eta_2-\eta_1)\delta_{ik}v_{ll}+(\eta_4+\eta_1-\eta_2)(\delta_{ik}n_ln_mv_{lm}+n_in_kv_{ll})+$$
$$+(\eta_3-2\eta_1)(n_in_lv_{kl}+n_kn_lv_{il})+(\eta_5+\eta_1+\eta_2-2\eta_3-2\eta_4)n_in_kn_ln_mv_{lm}. \tag{41.4}$$

上述所有系数确定的适宜性可由下面的耗散函数表达式来说明. 当沿着 $\boldsymbol{n}$ 的方向选取一个坐标轴(z 轴)时,耗散函数可以取为

$$2R=2\eta_1\left(v_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}v_{\gamma\gamma}\right)^2+\eta_2v_{\alpha\alpha}^2+2\eta_3v_{\alpha z}^2+2\eta_4v_{zz}v_{\alpha\alpha}+$$
$$+\eta_5v_{zz}^2+\frac{1}{T}\{\kappa_{\parallel}(\partial_zT)^2+\kappa_{\perp}(\partial_\alpha T)^2\}+\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{h}^2, \tag{41.5}$$

式中的指标 α,β,γ 取 x,y 两个值. 因为必须有 $R>0$(熵增加),所以系数 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_5,\kappa_{\parallel},\kappa_{\perp},\gamma$ 必须为正,并且,

$$\eta_2\eta_5>\eta_4^2. \tag{41.6}$$

这样一来,描述向列相介质总共有九个动理系数:五个黏性系数,两个热导率,还有系数 γ(也具有黏性系数的量纲)和无耗散的量纲为1的系数 λ.

当运动着的流体可以被认为是不可压缩(流体运动速度必须小于声速)的重要情形下,出现在运动方程中的黏性系数的数目要减少. 不可压缩流体的连续

---

① 注意,该速度由量 x_a,X_a 表示为公式 $2R/T=-\sum_a\dot{x}_aX_a$.

② 在文献中,量 $\dot{x}_a$ 和 X_a 往往相应地称为**热力学流**和**热力学力**.

③ 向列相的耗散系数已由莱斯利(F. M. Leslie,1966)和帕罗迪(O. Parodi,1970)以其它形式引用. 看来,文献中向列相黏性系数定义的公认选择尚未建立.

性方程归结为等式$\nabla\cdot\boldsymbol{v}\equiv v_{ll}=0$. 在应力张量(41.4)中,第二项完全消失,而第三项具有 $\mathrm{const}\cdot\delta_{ik}(n_l n_m v_{lm})$的形式. 我们注意到,最后一项在耗散函数中没有贡献(它在形成乘积$\sigma'_{ik}v_{ik}$时消失了,因为$v_{ik}\delta_{ik}=v_{kk}=0$),此外,在总应力张量$\sigma_{ik}$中,它也具有如同$-p\delta_{ik}$项一样的张量结构. 但是,在不可压缩流体的流体动力学方程中,压力(跟速度一样)只是作为坐标和时间的未知函数而出现的,该函数在求解运动方程的结果中确定,在这里,它不是与状态方程其它同类量有关的热力学量. 因此,在应力张量中的$-p\delta_{ik}$项和 $\mathrm{const}\cdot\delta_{ik}(n_l n_m v_{lm})$项可以彼此合并,简单地归结为重新定义的压力. 这样一来,不可压缩向列相流体的黏性应力张量就归结为表达式:

$$\sigma'_{ik}=2\eta_1 v_{ik}+(\eta_3-2\eta_1)(n_i n_l v_{kl}+n_k n_l v_{il})+(\bar{\eta}_2+\eta_1-2\eta_3)n_i n_k n_l n_m v_{lm},\tag{41.7}$$

式中$\bar{\eta}_2=\eta_2+\eta_5-2\eta_4$. 上式总共包含三个独立的黏性系数. 相应的耗散函数(z轴沿着矢量$\boldsymbol{n}$):

$$2R=2\eta_1\left(v_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}v_{\gamma\gamma}\right)^2+\bar{\eta}_2 v_{zz}^2+2\eta_3 v_{\alpha z}^2+$$
$$+\frac{1}{T}\{\kappa_{\parallel}(\partial_z T)^2+\kappa_{\perp}(\partial_\alpha T)^2\}+\frac{1}{\gamma}h^2\tag{41.8}$$

(注意$v_{\alpha\alpha}+v_{zz}=0$). 由不等式(41.6)保证使系数$\bar{\eta}_2$为正数.

习 题

习题 试确定作用在直线向错(弗兰克指标$n=1$)上的力. 设运动方向垂直于向错直线(H. Imura 和 K. Okano, 1973).

解: 让我们考虑在坐标系中静止并与z轴重合的向错,而流体沿着x轴方向以常速度$\boldsymbol{v}$运动. 在向错中指向矢$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$在坐标系中的分布是稳定的,并且由下面的公式给出(对于具有径向"指向矢流线"的向错,见图27(a)):

$$n_x=\cos\varphi,\quad n_y=\sin\varphi,$$

式中极角$\varphi=\arctan(y/x)$. 在方程(40.3)中,有$\partial\boldsymbol{n}/\partial t=0$和$v_{ik}=0$(因为是均匀流动),所以只剩下

$$v\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial x}=\frac{\boldsymbol{h}}{\gamma}.$$

由此,我们求出由运动引起的弱分子场:

$$\boldsymbol{h}=\gamma v(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{n})\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

式中$\boldsymbol{\nu}$是z轴方向的单位矢量(在没有运动时,分子场$\boldsymbol{h}=0$,因为静止的向错是介质的平衡状态). 耗散函数

$$2R=\frac{h^2}{\gamma}=\gamma v^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2=\gamma v^2\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

在单位时间和直线向错单位长度上耗散的能量由下面的积分给出：

$$\int 2R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\gamma v^2L,\quad L=\ln\frac{R}{a},$$

式中 R 是运动区域的横向尺寸，而 a 是分子尺寸. 耗散能量必须由作用在向错上的力 $\boldsymbol{f}$ 所做的功 vf 来补偿. 由此得到

$$f=\pi\gamma vL.$$

对于具有圆形流线的向错(见图 27(b))也可以得到同样的结果.

§42 向列相液晶内微振动的传播

向列相流体动力学的完整而精确的方程组是非常复杂的. 自然，在微振动情形下，它容许简化为线性方程.

在着手研究向列相介质微振动的传播之前，我们预先回想一下存在于普通流体中的振动类型(模式). 首先是普通的声波，它具有色散规律(频率 ω 和波矢量 $\boldsymbol{k}$ 之间的关系) $\omega=ck$，而传播速度为

$$c=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s}. \tag{42.1}$$

声波的振动是纵向的(见第六卷，§64).

其次，存在强阻尼时，**黏性波**具有色散规律

$$\mathrm{i}\omega=\frac{\eta}{\rho}k^2, \tag{42.2}$$

式中 η 是黏性系数(见第六卷 §24). 这些波是横波(速度 $\boldsymbol{v}$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{k}$)，因而常常把它称为**剪切波**. 它们可以有两个独立的偏振方向. 色散规律与偏振方向没有关系.

最后，处于静止的流体，温度(和熵)的微小波动，也像这样强阻尼波一样传播，具有色散规律：

$$\mathrm{i}\omega=\chi k^2, \tag{42.3}$$

式中 χ 是介质的温度传导率(见第六卷，§52).

在向列相介质中也存在相似类型的波. 但是，在向列相里，存在一个附加的动力学变量，即指向矢 $\boldsymbol{n}$，它又导致向列相出现新的特殊类型的波(P. G. de Gennes, 1968).

在向列相中，让我们从普通的声开始. 显而易见，在足够长的波(亦即足够小的 k 值)的范围，对于与存在新动力学变量有关的声速进行的修正是很小的，所以声速仍然由前面的简单公式(42.1)给出. 在振动介质中，我们将指向矢表

示为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_0+\delta\boldsymbol{n}$，其中 $\boldsymbol{n}_0$ 是介质无扰动时的值，它沿着整个介质是常量，而 $\delta\boldsymbol{n}$ 是小的可变化部分（因为 $\boldsymbol{n}^2=\boldsymbol{n}_0^2=1$，故 $\boldsymbol{n}_0\cdot\delta\boldsymbol{n}=0$）. 将式(40.3)的左部跟它右部的前两项相比较显示，$\omega\delta n\sim kv$，即 $\delta n\sim v/c$（在考虑近似时，$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{h}/\gamma$ 项是更高阶的小量，因为按式(36.9)，分子场 $h\propto k^2$）. 因此，在流体能量密度中的 E_d 项有

$$E_d\sim K(k\delta n)^2\sim K\left(\frac{vk}{c}\right)^2,$$

亦即当和主要项相比较时，它是 k^2 数量级，而主要项 $\sim\rho v^2$. 因此，在考虑近似时，这个能量可以忽略，并且这也是关于声速的上述论断所作的证明.

在下面按照 k 近似时，出现了与耗散过程有关的声吸收. 与通常的流体相比较，向列相的特殊点是声吸收表现为各向异性，亦即与声波的传播方向有关（见习题 1）.

在向列相中，其它的振动类型具有类似于式(42.2)，(42.3)的色散规律：$\omega\propto k^2$. 这就意味着，当 k 足够小时，在所有的情形下总有 $\omega\ll ck$. 同样，由此可以得出，在这些振动中可以把流体看作是不可压缩的①. 这时，连续性方程归结为 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ 或对于平面波 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}=0$. 因而，所研究的振动是与振动速度有关的横向剪切振动.

为了研究所有这些振动，我们要对运动方程进行线性化处理. 在其中，假设 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_0+\delta\boldsymbol{n}$，$p=p_0+\delta p$. 在第一次近似时，分子场对 $\boldsymbol{n}$ 的导数是线性的，并因此分子场对 $\delta\boldsymbol{n}$ 的导数也是线性的：

$$\boldsymbol{H}=K_1\nabla\nabla\cdot\delta\boldsymbol{n}-K_2\nabla\times[\boldsymbol{n}_0(\boldsymbol{n}_0\cdot\nabla\times\delta\boldsymbol{n})]+K_3\nabla\times[\boldsymbol{n}_0\times(\boldsymbol{n}_0\times\nabla\times\delta\boldsymbol{n})].\tag{42.4}$$

在应力张量(40.16)"反作用（无效功）"部分的第一项是关于 $\delta\boldsymbol{n}$ 的二次项，因此可以忽略. 同样可以忽略的二次项还出现在方程(40.7)中表示张量散度的项 $\partial_k\sigma_{ik}^{(r)}$ 和它左边的 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 项里面. 最后，这个方程归结为下式：

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}=-\partial_i\delta p+\frac{1}{2}(n_{0i}\partial_k h_k-n_{0k}\partial_k h_i)-\frac{\lambda}{2}(n_{0i}\partial_k h_k+n_{0k}\partial_k h_i)+\partial_k\sigma'_{ik}.\tag{42.5}$$

而在方程(40.3)中，其右边的前两项里面，足以用 $\boldsymbol{n}_0$ 代替 $\boldsymbol{n}$，并且忽略其左边的 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\delta\boldsymbol{n}$ 项：

$$\frac{\partial\delta n_i}{\partial t}=\Omega_{ki}n_{0k}+\lambda(\delta_{il}-n_{0i}n_{0l})n_{0k}v_{kl}+\frac{1}{\gamma}h_i.\tag{42.6}$$

---

① 我们注意到（见第六卷，§10），对于非定常运动的流体，在 $v\ll c$ 和 $\tau\gg l/c$（这里 τ 和 l 分别是时间和距离，在其间流体的速度经历了明显的变化）的条件下，可以认为是不可压缩的. 对于振动运动，第一个条件在振动的振幅足够小时总是满足的，而第二个条件恰好意味着要求 $\frac{\omega}{k}\ll c$.

由于等式 $\boldsymbol{n}_0\cdot\delta\boldsymbol{n}=0,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}=0$，矢量 $\delta\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 总共有两个独立分量. 因此，方程(42.5)，(42.6)组成四个线性方程组. 它们确定四个振动模式，其中的每一个无论是速度还是指向矢都经受到彼此相关联的耦合振动. 但是，通常情形，大量的地简化是由于量纲为 1 的关系式

$$\mu=\frac{K\rho}{\eta^2} \tag{42.7}$$

是个小量 $\sim10^{-2}-10^{-4}$（其中 K 和 η 是向列相的弹性模量及其黏性系数 $\eta_1,\bar{\eta}_2,\eta_3,\gamma$ 的数量级）. 如下面将要表示那样，此时可以分为两个主要的振动类型，对于其中的每一个，方程(42.5)，(42.6)都容许作某种简化.

其中的第一种类型，频率与波矢量的关系为

$$\mathrm{i}\omega\sim\frac{\eta k^2}{\rho}, \tag{42.8}$$

类似地公式是(42.2)（由于后面要说明的理由，该振动称为快剪切振动）. 在两个方程(42.5)，(42.6)中，可以忽略所有含有 $\boldsymbol{h}$ 的项. 实际上，由式(42.8)可见：

$$\delta n\sim\frac{kv}{\omega}\sim\frac{\rho v}{\eta k},$$

并因此，分子场

$$h\sim Kk^2\delta n\sim\frac{\rho vkK}{\eta}.$$

利用这些估计极易确信，方程中的 $\boldsymbol{h}$ 项在跟 v_{ik} 项相比较时是个小量，它们的比是 $\sim\mu$. 这样一来，快剪切振动方程组归结为

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}=\partial_k\sigma'_{ik}-\partial_i\delta p, \tag{42.9}$$

$$\frac{\partial\delta n_i}{\partial t}=\Omega_{ki}n_{0k}+\lambda(\delta_{il}-n_{0i}n_{0l})n_{0k}v_{kl}. \tag{42.10}$$

第一个方程不包含 $\delta\boldsymbol{n}$，由该方程确定振动速度和色散关系，然后由第二个方程直接给出伴随的指向矢振动（见习题 2）.

现在我们转向在 $\mu\ll1$ 的条件下的第二种类型的剪切振动，即对于向列相特殊的指向矢慢振动. 在这种运动中，指向矢可变部分的数量级由方程(42.6)左边的导数 $\partial\delta\boldsymbol{n}/\partial t$ 和右边的 $\boldsymbol{h}/\gamma$ 项之间的平衡确定：$\omega\delta n\sim h/\gamma$. 同时，因为 $h\sim Kk^2\delta n$，定性的给出这些振动的色散关系：

$$\mathrm{i}\omega\sim\frac{Kk^2}{\gamma}. \tag{42.11}$$

显然，在将方程(42.5)左边的导数 $\rho\partial\boldsymbol{v}/\partial t\sim\rho v\omega$ 跟右边的 $\partial_k\sigma'_{ik}\sim\eta vk^2$ 项相比较时，前者是个小量，并因此可以忽略. 方程

$$-\partial_i\delta p+\frac{1}{2}(n_{0i}\partial_k h_k-n_{0k}\partial_k h_i)-\frac{\lambda}{2}(n_{0i}\partial_k h_k+n_{0k}\partial_k h_i)+\partial_k\sigma'_{ik}=0$$

(42.12)

确定了振动速度和指向矢之间的关系,然后由方程(42.6)确定色散关系(见习题3).

注意到频率关系式(42.11)和(42.8),有 $\omega_s/\omega_f\sim\mu$(下标 s 表示慢振动,下标 f 表示快振动).这样一来,在同样的 k 值进行比较时,频率 ω_s 比 ω_f 要小,由此联想到相应的慢振动和快振动名称的由来.

最后,在静止的向列相介质中,温度波动与普通流体中相应振动的不同之处只是在色散关系中出现各向异性,类似于式(42.3)(见习题4).

习　题

习题1　试确定向列相介质的声吸收系数.

解:声吸收系数①按照下面的关系式计算:

$$\Gamma=\frac{\overline{R}}{c\rho\,\overline{v^2}}$$

(见§34),而耗散函数由公式(41.5)给出.在这种情形下,可以忽略该式中的 $\boldsymbol{h}^2/\gamma$ 项.实际上,因为已经指出,分子场 $h\propto k^2$,因此 $h^2/\gamma\propto k^4$,而 R 中的其余项正比于波矢量的较低次幂,即正比于 k^2.经过简单的计算导出下面的结果②:

$$\Gamma=\frac{\omega^2}{2\rho c^3}\Big\{(\eta_1+\eta_2)+2(\eta_3+\eta_4-\eta_1-\eta_2)\cos^2\theta+$$
$$+(\eta_1+\eta_2+\eta_5-2\eta_3-2\eta_4)\cos^4\theta+$$
$$+[\kappa_\perp+(\kappa_\parallel-\kappa_\perp)\cos^2\theta]\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)\Big\},$$

式中 θ 是 $\boldsymbol{k}$(并因此也是 $\boldsymbol{v}$)和 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角.而导热部分吸收的计算完全类似于对普通流体那样的计算,可参见第六卷,§79(c_p,c_v 是物质单位质量的热容量).

习题2　试寻求快剪切振动的色散关系.

解:对于平面波($\boldsymbol{v}\propto\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\omega t)$),方程(42.9)取为

$$-\mathrm{i}\rho\omega v_i=-\mathrm{i}k_i\delta p+\mathrm{i}k_k\sigma'_{ik}.$$

对于不可压缩向列相黏性应力张量由公式(41.7)给出,经过简单的计算(考虑$\boldsymbol{v}$

---

① 在这里,为了避免跟耗散系数 γ 相混淆,我们用 Γ 来表示这个量.

② 当然,在计算二次项时,所有的振动量都必须写为实形式,即它们与 t 和 $\boldsymbol{r}$ 的关系由因子 $\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$ 给出.

是横向的,$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}=0$)便导出如下形式的方程①:

$$\mathrm{i}\rho\omega\boldsymbol{v}=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\delta p+a_1k^2\boldsymbol{v}+a_2k^2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})+a_3k\boldsymbol{k}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}), \tag{1}$$

式中

$$a_1=\eta_1+\frac{1}{2}(\eta_3-2\eta_1)\cos^2\theta,$$

$$a_2=\frac{1}{2}(\eta_3-2\eta_1)+(\bar{\eta}_2+\eta_1-2\eta_3)\cos^2\theta,$$

$$a_3=\frac{1}{2}(\eta_3-2\eta_1)\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角. 将方程(1)乘以 $\boldsymbol{k}$,我们得到按振动速度确定振动压力的公式:

$$\delta p=\mathrm{i}k(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})(a_3+a_2\cos\theta), \tag{2}$$

而待求色散关系由方程(1)的横向分量确定. 将该方程乘以 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}$,得到色散关系:

$$\mathrm{i}\omega_\perp=\frac{k^2}{\rho}a_1(\theta)=\frac{k^2}{\rho}\left(\eta_1\sin^2\theta+\frac{1}{2}\eta_3\cos^2\theta\right),$$

对应于 $\boldsymbol{v}$(垂直于通过矢量 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的平面)的振动. 而在这个平面上偏振振动的色散关系由式(1)乘以 $\boldsymbol{n}$ 并借助于式(2)消去其中的 δp 得到:

$$\mathrm{i}\omega_\parallel=\frac{k^2}{\rho}\{a_1(\theta)+a_2(\theta)\sin^2\theta\}=\frac{k^2}{\rho}\left\{\frac{1}{4}(\eta_1+\bar{\eta}_2)\sin^2 2\theta+\frac{1}{2}\eta_3\cos^2 2\theta\right\}.$$

自然,求得的这两个关系与由式(42.8)定性的估计是一致的.

习题 3 试寻求慢剪切振动的色散关系.

解:对于平面波($\delta\boldsymbol{n}\propto\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\omega t)$),线性化的分子场为

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{H}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H})=-K_1\{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k})\}(\boldsymbol{k}\cdot\delta\boldsymbol{n})-K_2\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\cdot\delta\boldsymbol{n})-K_3(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})^2\delta\boldsymbol{n},$$

式中

$$\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}\quad(\boldsymbol{\nu}^2=k^2\sin^2\theta).$$

方程(42.12)(其中的 σ'_{ik} 引自式(41.7))取为

$$-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\delta p-a_1k^2\boldsymbol{v}-a_2k^2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})-a_3k\boldsymbol{k}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})+\mathrm{i}\frac{1-\lambda}{2}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{h})-\mathrm{i}\frac{1+\lambda}{2}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k})=0, \tag{1}$$

函数 $a_1(\theta)$,$a_2(\theta)$ 已在习题 2 中确定. 将上式乘以 $\boldsymbol{\nu}$,我们得到垂直于平面($\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n}$)的偏振振动 $\boldsymbol{v}$ 和 $\delta\boldsymbol{n}$ 之间的关系:

$$a_1(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu})=-\mathrm{i}\frac{1+\lambda}{2k^2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\nu})=\mathrm{i}\frac{1+\lambda}{2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})K_\perp(\boldsymbol{\nu}\cdot\delta\boldsymbol{n}), \tag{2}$$

---

① 为了简化写出的公式,在下面的习题中,处处都把 $\boldsymbol{n}_0$ 的下标 0 省略.

式中

$$K_{\perp}=K_2\sin^2\theta+K_3\cos^2\theta.$$

另外,将方程(42.6)乘以 $\boldsymbol{\nu}$ 后写为:

$$-\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{\nu}\cdot\delta\boldsymbol{n})=\frac{\mathrm{i}}{2}(1+\lambda)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{v})-\frac{k^2K_{\perp}}{\gamma}(\boldsymbol{\nu}\cdot\delta\boldsymbol{n}).$$

由此,借助于式(2)消去($\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}$)项,我们得到垂直于 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 平面的偏振振动的色散关系:

$$\omega_{\perp}=k^2K_{\perp}\left\{\frac{1}{\gamma}+\frac{(1+\lambda)^2\cos^2\theta}{4a_1}\right\}.$$

为了求得在($\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}$)平面上的偏振振动的关系,我们取方程(1)在垂直于矢量 $\boldsymbol{k}$(在($\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}$)平面上)方向的分量,并将它乘以 $\boldsymbol{n}$,则得到

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})(a_1+a_2\sin^2\theta)=-\frac{\mathrm{i}}{2}(1+\lambda\cos2\theta)K_{\parallel}(\boldsymbol{k}\cdot\delta\boldsymbol{n}),$$

式中

$$K_{\parallel}=K_1\sin^2\theta+K_3\cos^2\theta.$$

由方程(42.6)进行同样的运算,我们得到

$$\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{k}\cdot\delta\boldsymbol{n})=\frac{\mathrm{i}}{2}k^2(1+\lambda\cos2\theta)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})+\frac{k^2}{\gamma}K_{\parallel}(\boldsymbol{k}\cdot\delta\boldsymbol{n}).$$

从所得到的两个方程中消去($\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}$)项,求得色散关系:

$$\mathrm{i}\omega_{\parallel}=k^2K_{\parallel}\left\{\frac{1}{\gamma}+\frac{(1+\lambda\cos2\theta)^2}{4(a_1+a_2\sin^2\theta)}\right\}.$$

所求出的这两个关系与按式(42.11)的定性估计是相符的①.

习题 4 试寻求静止向列相温度波动(振动)的色散关系.

解:对不可压缩向列相方程(40.8)进行像对普通流体一样的变换(参见第六卷,§50),并化为方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\chi_{ik}\partial_i\partial_kT,\quad \chi_{ik}=\frac{\kappa_{ik}}{\rho c_p}=\chi_{\parallel}n_in_k+\chi_{\perp}(\delta_{ik}-n_in_k).$$

对于振动 $\delta T\propto\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\omega t)$,我们得到色散关系:

$$\mathrm{i}\omega=k^2(\chi_{\parallel}\cos^2\theta+\chi_{\perp}\sin^2\theta).$$

§43 胆甾相液晶力学

胆甾相液晶(或简称**胆甾相**)与向列相的不同之处是在胆甾相的对称元素中不存在反演中心. 而指向矢 $\boldsymbol{n}$ 和 $-\boldsymbol{n}$ 的方向,如前所述,仍然是等价的(参见第

① 当 k 是实数时,实量 $\mathrm{i}\omega$ 必须是正的,即振动应该随着时间衰减(但是,不能自发的增大). 在习题 2 和 3 中获得的所有色散关系都具有这个特性.

五卷，§140）.

由于没有对称中心，将导致形变自由能可以包含导数的线性项——伪标量 $\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{n}$. 自由能的一般形式可以表示为

$$F_d=\frac{K_1}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{n})^2+\frac{K_2}{2}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{n}+q)^2+\frac{K_3}{2}(\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{n})^2, \tag{43.1}$$

式中 q 是参数，其倒数具有长度的量纲. 这个区别引起了介质平衡（在没有外来作用时）状态性质的根本性变化，现在它在空间不再是均匀（$\boldsymbol{n}=\text{const}$）的，而向列相是均匀的.

胆甾相平衡状态对应的指向矢方向分布为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{n}=-q,\quad \boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{n}=0 \tag{43.2}$$

（由自由能(43.1)的最小值等于零时求得）. 这些方程的解为

$$n_x=\cos qz,\quad n_y=\sin qz,\quad n_z=0. \tag{43.3}$$

这种结构（我们把它称为**螺旋状结构**）可以想象为原来在 xy 平面上有一个确定方向 $\boldsymbol{n}=\text{const}$ 的向列相介质围绕 z 轴转动的结果. 胆甾相的有向结构沿着空间的某一个方向（z 轴）是周期性的. 矢量 $\boldsymbol{n}$ 沿 z 轴方向每经过 $2\pi/q$ 长度间隔之后又回到以前的值. 但是，因为 $\boldsymbol{n}$ 和 $-\boldsymbol{n}$ 方向是等价的，所以结构真实的重复周期减小了一半，即等于 π/q. 自然，用公式(43.3)对胆甾相螺旋状结构的宏观描述，只有在结构的螺距与分子的尺寸相比较非常大时才有意义. 而对于真实的胆甾相，这个条件是成立的（$\pi/q\sim10^{-5}$ cm）.

由于在推导向列相的平衡方程和运动方程时没有利用它存在的反演中心，因此那个一般形式的方程对于胆甾相也是正确的. 同时也存在许多差别. 首先，F_d 的表达式变了，必须按式(36.5)的定义来计算其分子场 $\boldsymbol{h}$. 其次，在自由能中存在着导数的线性项，它将导致模量 K_2 的值在等温和绝热之间出现差异（比较§36 的最后部分）. 在§40，§41 表示流体动力学方程的公式中，基本的热力学变量是密度和熵. 因此，必须利用绝热的弹性模量（像函数 ρ 和 S 一样）.

最后，与向列相方程相比较，胆甾相流体动力学方程组的根本变化是在方程的耗散部分出现了附加项——在应力张量 σ'_{ik}，热流密度 $\boldsymbol{q}$ 和式(40.3)右端的量 $\boldsymbol{N}$ 中出现了附加项（F. M. Leslie，1968）：

$$\begin{gathered}\sigma'_{ik}=(\sigma'_{ik})_{\text{nem}}+\mu(n_ie_{klm}+n_ke_{ilm})n_m\partial_lT,\\ N_i=(N_i)_{\text{nem}}+\nu e_{ikl}n_k\partial_lT,\\ q_l=(q_l)_{\text{nem}}+\nu_1e_{lki}n_kh_i+\mu_1(e_{lmi}n_k+e_{lmk}n_i)n_mv_{ik}.\end{gathered} \tag{43.4}$$

式中带下标“nem”的项表示向列相流体动力学中的表达式. 在这些关系式中的附加项不是真实的，而是伪张量和伪矢量，从而破坏了空间反演的对称性. 就是因为这个原因，这些项在向列相流体动力学中不存在. 注意，要想构造类似的项为真实的张量或矢量是不可能的，这是由于方程对于 $\boldsymbol{n}$ 变号的不变性要求的.

例如，σ'_{ik}中形如 const · $(n_i\partial_k T + n_k\partial_i T)$的项或者 $\boldsymbol{q}$ 中形如 const · $\boldsymbol{h}$ 的项，它们随着 $\boldsymbol{n}$ 一起改变符号，但是应力张量和热流密度对于这个变换而言必须是不变量. 类似地，在 $\boldsymbol{N}$ 中形如 const · ∇T 的项也是不可能的，因为相对于 $\boldsymbol{n}$ 变号来说，它是不变量，但是 $\boldsymbol{N}$(由导数 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}/\mathrm{d}t$ 确定)会改变符号.

在表达式(43.4)中的系数，由昂萨格原理得到它们的相互联系的关系式. 为了应用这个原理(比较 §41)，我们将 σ'_{ik}, q_i, N_i 取作"热力学流" $\dot{x}_a$. 由耗散函数(40.21)(更确切地说，从由熵增确定的函数 $2R/T$)的形式可见，相应的"热力学力"X_a 将为 $-v_{ik}/T, \partial_i T/T^2$ 和 $-h_i/T$. 同时应顾及到，对于时间反转(改变符号)，σ'_{ik}是偶性的，而 q_i, N_i 是奇性的(这从它们在方程(40.3)，(40.7)和(40.8)中所处的位置可以看出). 假如对于这个变换，量 x_a 和 x_b 具有同样的奇偶性，则相应的与平衡有关的动理系数 $\gamma_{ab}=\gamma_{ba}$；假如 x_a 和 x_b 的奇偶性不同，则 $\gamma_{ab}=-\gamma_{ba}$. 现在将关系式(43.4)中"交叉的"系数进行比较①，我们得到等式：

$$\nu_1=\nu T, \quad \mu_1=\mu T.$$

这样一来，最终可以将式(43.4)重新写为

$$\begin{gathered}\sigma'_{ik}=(\sigma'_{ik})_{\text{nem}}-\mu[n_i(\boldsymbol{n}\times\nabla T)_k+n_k(\boldsymbol{n}\times\nabla T)_i],\\ \boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}_{\text{nem}}+\nu(\boldsymbol{n}\times\nabla T),\\ \boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_{\text{nem}}+\nu T(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{h})+2\mu T\boldsymbol{n}\times(v\boldsymbol{n}).\end{gathered} \tag{43.5}$$

式中的记号$(v\boldsymbol{n})$表示具有分量为 $v_{ik}n_k$ 的矢量.

这样，在胆甾相力学中，出现了应力张量和矢量 $\boldsymbol{N}$ 依赖于温度梯度的关系②. 这种关系的形式(矢量积 $\boldsymbol{n}\times\nabla T$)就意味着温度梯度导致了作用在指向矢和流体质量上的**扭曲力矩**的出现. 同时，分子场(伴随指向矢相对于流体的旋转)和流体的速度梯度导致了热流的出现.

对于胆甾相来说，一个特殊的流体动力学现象，可以直观的描述为流体穿过保持静止的螺旋形结构的"渗透"(W. Helfrich，1972)，这将在下面叙述.

我们设想螺旋形结构的胆甾相介质固定在空间中(比如说，借助于一定的作用连接在限制介质的壁板上). 我们必须指出，在这些条件下，遍及空间在结构轴(z 轴)方向有可能存在流体均匀的匀速流动.

因为式(43.3)的结构符合介质的平衡状态，它使分子场变为零，即 $\boldsymbol{h}=0$. "渗流"的存在使结构发生了某些畸变，并相应地(跟流动速度 v 一起)造成一个小的分子场. 该分子场按指向矢运动方程(40.3)确定. 因为场 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$(其速度趋

---

① 在比较时一定要仔细的注意因子 e_{ikl}中指标的次序！

② 注意(见第六卷，§49)，在运动方程的耗散项中间，存在含有次要独立热力学量(例如压力)的梯度项是禁止用的，这是由熵增定律要求的. 这类项的存在，将导致在耗散函数中出现含有乘积$\nabla p\cdot\nabla T$ 和 $\boldsymbol{h}\cdot\nabla p$ 的项，在没有包含平方项$(\nabla p)^2$ 的情形下，它们不可能保证 R 的正定性.

于零)是静止的,故$\partial \boldsymbol{n}/\partial t=0$,并且因为假定流体的流动是均匀的($v_z=v=$ const),所以$v_{ik}=\Omega_{ik}=0$. 最后,方程归结为等式:

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{n}=v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}z}=\frac{\boldsymbol{h}}{\gamma}.$$

由此,按公式(43.3)的$\boldsymbol{n}(z)$,我们得到

$$\boldsymbol{h}=\gamma v\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{n},\tag{43.6}$$

式中矢量$\boldsymbol{q}$(绝对值为q)沿z轴方向. 在所研究的情形下,耗散函数的表达式(40.21)归结为$2R=\boldsymbol{h}^2/\gamma$,将其中的$\boldsymbol{h}$代以式(43.6),得

$$2R=\gamma v^2q^2.\tag{43.7}$$

由此给出流体在单位时间和单位体积内耗散的能量. 在稳定运动情形下,该能量抵消了来自于维持沿z轴方向作用的压力梯度$p'\equiv \mathrm{d}p/\mathrm{d}z$所作的外力功. 在介质上作用的体力密度恰好给出梯度$-\nabla p$,该力在单位时间和单位体积内所做的功是$-p'v$,使它等于$2R$,我们得到"渗透"速度:

$$v=\frac{|p'|}{\gamma q^2}.\tag{43.8}$$

对于"穿过"螺旋形结构流动的流体质点来说,指向矢$\boldsymbol{n}$带有角速度vq旋转. 这个旋转伴随有由系数γ表示的"摩擦"出现,并由它确定流速.

在真实的条件下,在整个流动的宽度上速度不可能是常数,在限制流动的管壁上速度必须变为零,在某个厚度δ层上速度罚生降低. 但是,对于上述运动唯一的长度参数是$1/q$. 如果我们把胆甾相的所有黏性系数都取为具有相同的数量级,则不存在任何量纲为1而数量级不为"1"的参数. 很明显,在这样的条件下,只可能是$\delta\sim 1/q$. 这样一来,在沿着管流动时,它的半径比$1/q$大得多,公式(43.8)除了靠近壁板很薄(螺旋形结构螺距量级的厚度)的薄层之外到处都是正确的.

§44 近晶相液晶的弹性性质

按照通常的术语,**近晶相液晶**(或**近晶相**)属于具有各式各样层状结构的各向异性流体的范畴. 至少,它们之中的一些物体,其微观分子密度函数仅仅与一个坐标(比如说,z)有关,并且是该坐标的周期函数,$\rho=\rho(z)$. 注意(参见第五卷,§128),密度函数由质点在物体中不同位置的概率分布确定. 在现在的情形下,可以说分子的各种位置是作为整体即$\rho\mathrm{d}V$来说的,它是处于体元$\mathrm{d}V$内的单个分子惯性中心的概率. 具有密度函数$\rho(z)$的物体,可以想象为是由彼此处于等距离的相互自由移动的平面层组成的. 在每一层中分子惯性中心的分布都是无序的,在这个意义上,其中的每一层都是"二维流体",但是,流体层可能是各向同性的,也可能是各向异性的. 这个不同可能与层中分子取向有序的性质有

关. 在最简单的情形,取向分布的各向异性总共只给出一个 $\boldsymbol{n}$ 的方向(比如说,分子的"长轴"方向). 如果这个方向垂直于层平面,当层是各向同性时,则 z 轴是物体的对称轴,这样的结构就是所谓的近晶相 A[①]. 而如果 $\boldsymbol{n}$ 的方向倾向于 xy 平面,则在这个平面上出现了从优方向,同时轴对称也消失了. 这样的结构就是所谓的近晶相 C.

下面,我们只讨论比较简单的近晶相 A(并把它简称为近晶相). 在所有已知的近晶相 A 中,除了关于 z 轴对称外,在 z 轴的两个方向也是等价的. 如果近晶相还具有反演中心,则它的宏观对称性(即点的对称群)就像在向列相那里一样. 而在微观对称性上,它们是完全不同的,因此其力学性质自然也是完全不同的.

至此,对于所论述的内容应作如下很重要的说明. 沿着物体体积存在具有非恒定密度函数的结构,设想由于热涨落[②]在物体小区域内引起的位移是足够小的. 但是,对于具有 $\rho=\rho(z)$ 的结构,在物体尺寸增大时这些涨落的位移将无限的增长(参见第五卷, §137). 换句话说,这就意味着在自身尺寸无限的介质内不可能存在一维的周期结构. 但是,实际上,由于物体尺寸增大时涨落增长的缓慢性(按对数),这一说法的意义只是个极端的假定. 估计(利用已知近晶相的典型材料常数值)显示,实际上可能导致一维周期结构破坏的只是不能实现的极大尺寸. 因此,在任何实际提出的问题中,$\rho(z)$ 的结构是能实现的.

同时,我们着重指出,由破坏 $\rho(z)$ 结构的涨落(亦即变为 $\rho=\text{const}$),绝不能使介质变成普通的流体. 其根本上的区别在于在空间不同点上密度涨落的相关函数的性质: $\langle\delta\rho(\boldsymbol{r}_1)\delta\rho(\boldsymbol{r}_2)\rangle$. 在普通流体中,这个函数是各向同性的,并且,当 $r=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|\to\infty$ 时,按照指数规律减小(参见第五卷, §116). 而在具有 $\rho=\rho(z)$ 的体系中,相关函数仍然(当物体的尺寸增加时)是各向异性的,并且,当 $r\to\infty$ 时, 只是缓慢的按照幂函数规律减小,而且比温度下降的还慢(见第五卷, §138).

现在我们着手构建近晶相介质力学,这需要从寻求它的形变自由能密度表达式开始. 鉴于在 xy 平面上介质微观上是均匀的,因为位移导致物质密度变化,所以在该平面上各点的位移只与能量的变化有关. 因此,我们把密度 ρ 和介质质点沿 z 轴的位移 $u_z\equiv u$ 选作基本流体动力学变量(除了假定温度沿介质不变化之外). 形变能取决于密度的变化 $\rho-\rho_0$(ρ_0 是介质未形变时的密度)和位移 u 对坐标的导数. 此时,一阶导数 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$,一般不可能包含在自由能的二次项中:如果物体作为一个整体环绕 x 轴或 y 轴转动,则这些导数将发生变化,但是

---

① 实验研究证实,所有近晶相液晶都是具有明确的界层间隔的层状结构,故又称为层状液晶. 根据资料介绍,现在至少有 9 种不同层状结构的近晶相液晶,并以其发现的年代分别命名为:近晶相 A,近晶相 B,……,近晶相 I 等. 本节只研究相对比较简单的近晶相 A. ——译者注

② 涨落是物质系统处于热力学平衡状态时,某种物理量在其平均值附近作无规则的微小变动的现象,如热涨落,密度涨落等. ——译者注

能量必须保持不变①.

像普通弹性理论一样，总是假设所有的量在空间的变化都足够的缓慢，因而形变能在按空间导数的幂级数展开时可由第一个非零项来确定. 但是，除此之外，我们还要假设更强的条件：假设位移 u 本身是如此的小，以致各层几乎处处保持平行于同一个 xy 平面②.

在这些假设下，并考虑到介质的对称性，我们得到近晶相的形变自由能：

$$F_d = F - F_0(T) = \frac{A}{2\rho_0}(\rho-\rho_0)^2 + C(\rho-\rho_0)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{B\rho_0}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{K_1}{2}(\nabla_\perp^2 u)^2,$$

$$\nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{44.1}$$

形如 $(\partial u/\partial z)\nabla_\perp^2 u$ 的项是禁用的③，这是因为这里我们假设了在 z 轴的两个方向是等价的，亦即对于变换 $u\to -u,\ z\to -z,\ x,y\to x,y$（关于 xy 平面的镜射）或 $u\to -u, z\to -z, y\to -y, x\to x$（环绕水平二次轴即 x 轴的旋转）是对称的. 同样的原因，也没有形如 $(\rho-\rho_0)\nabla_\perp^2 u$ 的项. 由于在 F_d 中不存在关于 x 和 y 的一阶导数，必须考虑用二阶导数（在固体弹性理论中没有）作为展开式的初始项. 未形变状态的稳定性条件，即能量式(44.1)为正的条件，记为

$$A>0,\quad B>0,\quad AB>C^2. \tag{44.2}$$

在式(44.1)中的系数符号 K_1 与式(36.1)中的符号是一样的，这样的选择不是偶然的. 实际上，近晶相层结构的形变可以用指向矢 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 的分布来描述，而指向矢被认为是垂直于由方程 $u(\boldsymbol{r}) = \text{const}$ 给出的形变层. 在层的畸变很小时

$$n_x \approx \frac{\partial u}{\partial x},\quad n_y \approx \frac{\partial u}{\partial y},\quad n_z \approx 1, \tag{44.3}$$

并且这时 $(\nabla_\perp^2 u)^2 = (\nabla\cdot\boldsymbol{n})^2$，即刚好是式(36.1)的相应项中出现的那个值. 而式(44.1)中的系数 B 和 C 是专门用来描述近晶相的结晶性质的系数，它们与向列相的不同④.

---

① 在固体的弹性能中，这些导数将进入具有 u_x 和 u_y 的导数 u_{xz} 和 u_{yz} 的组合中. 这些组合在所说的转动情形下是不变的.

② 在这个意义上，这里的近晶相力学的应用范围要比前面研究的向列相力学更为狭窄，在向列相，指向矢场 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 与未形变的均匀分布状态无论多大区别都是容许的.

③ 这样的项已在第五卷，§137 出现过.

④ 我们着重指出，在近晶相（近晶相 A）中，指向矢 $\boldsymbol{n}$（被认为是层中分子从优选取的方向）不是独立的流体动力学变量. 在向列相流体动力学中，变量 $\boldsymbol{n}$ 的特征是在整个物体中 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ 场的均匀旋转不引起能量的变化. 因此，$\boldsymbol{n}$ 沿着物体的缓慢变化只涉及很小的最后仅取决于 $\boldsymbol{n}$ 的导数的能量变化，并且可以按导数展开. 但是，在近晶相中，任何一个这样的旋转都相当于改变层状结构的取向，并与很大的能量变化有关. 注意，在近晶相 C 中，指向矢与法线倾斜某个确定的角，$\boldsymbol{n}$ 环绕法线（保持倾角的大小）的均匀旋转不再与能量的变化相联系. 所以，在这里又出现一个新的流体动力学变量——$\boldsymbol{n}$ 在层平面上的分量.

我们注意到，在式(44.3)的近似中，$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{n}\approx(\nabla\times\boldsymbol{n})_z=0$. 因此，形如 $\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{n}$ 的项不出现在近晶相的自由能中(因而也不出现在 §43 的胆甾相结构的畸变中)，这与在它们的对称元素中间是否存在反演中心无关.

近晶相的平衡方程由总自由能(用参数 ρ 和 u 表示)在表示物体总质量保持不变的附加条件 $\int\rho\mathrm{d}V=\text{const}$ 下取最小值得到. 将差

$$\int F_d\mathrm{d}V-\lambda\int\rho\mathrm{d}V$$

(其中常数 λ 是拉格朗日乘子)按 ρ 取最小值，得到等式

$$\frac{A}{\rho_0}(\rho-\rho_0)+C\frac{\partial u}{\partial z}=\lambda,$$

该式与层形变的密度变化有关. 假设 ρ_0 是 $\partial u/\partial z=0$ 时的密度，我们有 $\lambda=0$，于是

$$\rho-\rho_0=-\rho_0 m\frac{\partial u}{\partial z},\quad m=\frac{C\rho_0}{A}. \tag{44.4}$$

量纲为 1 的系数 m 与在 z 轴方向从近晶相切取的“杆”的泊松比 σ 有关. 实际上

$$\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}=-\frac{V-V_0}{V_0}=-(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$$

(见式(1.6))，式中 $u_{zz}=\partial u/\partial z$，而 u_{xx}，u_{yy} 是在 xy 平面上的应变张量之分量. 设 $u_{xx}=u_{yy}$，则有

$$u_{xx}=-\frac{1-m}{2}u_{zz},$$

将其与式(5.4)的定义相比较，得

$$\sigma=\frac{1-m}{2}. \tag{44.5}$$

对于流体，当 $m=0$ 时，系数 σ 具有特征值 $\sigma=1/2$.

借助于式(44.4)从(44.1)中消去密度变量，即得到只用 u 表示的自由能：

$$F_d=\frac{\rho_0 B'}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\frac{K_1}{2}(\nabla_\perp^2 u)^2, \tag{44.6}$$

式中

$$B'=B-\frac{C^2}{A}. \tag{44.7}$$

现在求出总自由能对 u 的变分，然后进行分部积分：

$$\delta\int F_d\mathrm{d}V=-\int F_z\delta u\mathrm{d}V, \tag{44.8}$$

式中

$$F_z=\rho_0 B'\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-K_1\ \nabla_\perp^2\nabla_\perp^2 u. \tag{44.9}$$

显然，F_z 是在由于形变引起的密度变化已经"修正"的条件下，沿着 z 轴方向作用在形变的近晶相每单位体积上的力.

在平衡时 $F_z=0$，因而位移 u 满足线性微分方程：

$$\rho_0 B'\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-K_1\ \nabla_\perp^2\nabla_\perp^2 u=0. \tag{44.10}$$

如果在物体上还作用外部附加的体力，则必须把它加在方程的左边（比较式(2.8)）.

关系式 $(K_1/B'\rho_0)^{1/2}$ 具有长度量纲，粗略估计它的数量级是：$(K_1/B'\rho_0)^{1/2}\sim a$，其中 a 是一维结构的周期，即层间距离. 如果在 xy 平面内在距离 $\sim l_\perp >> a$ 时，近晶相经受变化相当大的形变. 由式(44.10)可见，在 z 轴方向，只有在距离 $l_\parallel\sim l_\perp^2/a>>l_\perp$ 时，形变才经受相当大的变化.

作为例子，我们寻求方程(44.10)的格林函数，亦即寻求由附加于 $\boldsymbol{r}=0$ 点并在 z 轴方向作用的单位集中力在变点 $\boldsymbol{r}$ 处引起的位移 $u=G_{zz}(\boldsymbol{r})\equiv G(\boldsymbol{r})$（比较§8 的习题）. 该函数满足方程

$$\rho_0 B'\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}-K_1\ \nabla_\perp^2\nabla_\perp^2 G+\delta(\boldsymbol{r})=0. \tag{44.11}$$

对该方程实行傅里叶变换（亦即把它乘以 $e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 并对 d^3x 积分），我们得到关于函数 $G(\boldsymbol{r})$ 的傅里叶分量表达式

$$G_{\boldsymbol{k}}=[\rho_0 B'k_z^2+K_1 k_\perp^4]^{-1},$$

式中 $k_\perp^2=k_x^2+k_y^2$. 逆向傅里叶变换给出积分形式的未知函数：

$$G(\boldsymbol{r})=\int\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{\rho_0 B'k_z^2+K_1 k_\perp^4}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{44.12}$$

当 $\boldsymbol{k}\to 0$ 时，这个积分是对数发散的. 为了给它以确切的意义，必须消除物体的整体位移，为此我们假定在物体上某任意选取的 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 点固定. 这样，在被积表达式的分子中应写为 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0}$，并且避开了发散性.

我们再一次返回到关于热涨落对近晶相性质的影响问题，并且这一次是在弹性性质方面. 可以把问题按下面更为明确的方式提出：在涨落的影响下，由于对物体附加集中力而产生的形变是如何变化的？亦即格林函数 $G(\boldsymbol{r})$ 是如何变化的？我们发现，这个变化归结为将表达式(44.12)中的 k_z^2 和 $k_\perp^4$ 代以下面的关系式：

$$k_z^2\left(\ln\frac{1}{ak_z}\right)^{-4/5}\ 和\ k_\perp^4\left(\ln\frac{1}{ak_\perp}\right)^{2/5},$$

式中 a 是结构周期的数量级[1]. 这样的变化本身也可以直观的解释为在形变的波矢量特征值减小时(即它的特征长度($\sim 1/k$)增加时)弹性模量 B'和 K_1 的有效值的变化. 我们发现,当 $k_z \to 0$ 时,有效值 B'_{eff}减小,是原来值的$[\ln(1/ak_z)]^{-4/5}$倍,而当 $k_\perp \to 0$ 时,$K_{1\text{eff}}$增加,是原来值的$[\ln(1/ak_\perp)]^{2/5}$倍. 但是,事实上,这样的作用只有在非现实的极大尺寸的情形下才能成为主要的.

在这一节的最后我们指出,可以对包含在近晶相弹性能表达式(44.6)中的一些更高阶的项进行某些综合,但是,此时没有引入另外的系数.

对此,我们注意,在式(44.6)中,由写出的第一项在能量中的贡献,实际上与层间距离 a 的变化有关. 当位移 $u_z = u$ 时,导数$\partial u/\partial z$ 与该距离的相对变化相同,因此,这一项可以写为$\frac{1}{2}\rho_0 B'(\delta a/a)^2$. 但是,层间距离可以变化,这是由于位移 u 不仅依赖于坐标 z,而且依赖于坐标 x 和 y. 这并不难理解,我们设想所有各层同时转动,比如说,环绕 y 轴旋转了 θ 角,这样一来,沿着 z 轴结构周期的大小仍然等于 a. 而此时层间距离(按层的法线方向度量)等于 $a\cos\theta$. 在小的 θ 角时,层间距离的变化为

$$\delta a = a(\cos\theta - 1) \approx -\frac{a\theta^2}{2}.$$

因为,与此同时,在所考虑的转动情形下,位移为 $u = \text{const} + x\tan\theta \approx \text{const} + x\theta$,故有

$$\frac{\delta a}{a} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

在这种形式下,u 与 x 为任何依从关系时该表达式都是正确的. 如果 u 同时依从于 y,则必须用$(\nabla_\perp u)^2$ 来代替$(\partial u/\partial x)^2$.

这样一来,考虑上述效应时自由能(44.6)必须写为

$$F_d = \frac{\rho_0 B'}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^2 + \frac{K_1}{2}(\nabla_\perp^2 u)^2. \qquad (44.13)$$

在本节的习题中将利用这个表达式.

习　　题

习题　有一近晶相层厚度为 h,具有平行于层结构平面的平面边界,承受沿着垂直它的 z 轴方向的均匀拉伸. 试求拉伸的临界值,超过该值后,近晶相的层

---

① 见 G. Grinstein, R. A. Pelcovits, Physical Review Letters, 1981, 47:856; Physical Review A, 1982, 26:915.

E. И. Кац. 实验物理和理论物理杂志(ЖЭТФ), 1982, 83:1376. 在研究时,在自由能的展开式中必须同时考虑 u 的三次项和四次项.

结构对于横向扰动是不稳定的(W. Helfrich,1971)①.

解:均匀拉伸意味着形变 $u=\gamma z$,其中常数 $\gamma>0$. 为了研究稳定性,我们假定 $u=\gamma z+\delta u(x,z)$,其中 δu 是满足边界条件(设 xy 平面取在层的中间,当 $z=\pm h/2$ 时,$\delta u=0$.)的小扰动. 精确到二次项的扰动总弹性能(相对于沿 y 轴单位长度的):

$$\int\delta F_d\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint\left\{B'\rho_0\left(\frac{\partial\delta u}{\partial z}\right)^2-B'\rho_0\gamma\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}\right)^2+K_1\left(\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}z \qquad (1)$$

(带有 $\gamma\partial\delta u/\partial z$ 的项,在对 dz 积分时由于边界条件而消失了)

我们假定扰动形式为

$$\delta u=\mathrm{const}\cdot\cos k_z z\cdot\cos k_x x,\quad k_z=\pi n/h,\quad n=1,2,\cdots$$

(层结构的横向调幅). 结构的稳定性条件是能量(1)为正. 将全部被积分因子 $\sin^2$ 和 $\cos^2$ 用其 1/2 的中间值代替,我们得到这个条件,为

$$B'\rho_0(k_z^2-\gamma k_x^2)+K_1k_x^4>0.$$

稳定性(随着 γ 增加)的界限,由出现在该不等式左边的三项式的实根 k_x^2 确定(在整个 xy 平面上,复数 k_x 值不满足扰动的有限性条件). 第一个这样根的出现,发生在 $n=1$ 的扰动,我们对它求出临界拉伸的 γ 值和对应的 $k_x=k_c$ 值②:

$$\gamma_c=\frac{2\pi}{h}\left(\frac{K_1}{\rho_0B'}\right)^{1/2},\quad k_c=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\rho_0B'}{K_1}\right)^{1/2}.$$

§45　近晶相液晶的位错

近晶相位错的概念,也有通常晶体位错那样的意义. 区别只是由于微观结构具有一维(沿 z 轴)周期性,使近晶相位错的伯格斯矢量总是沿着 z 轴方向,而且大小等于结构周期 a 的整数倍.

考虑到上面这个意思,在适当确定弹性模量张量 λ_{iklm} 的条件下,在 §27 得到的环绕位错的形变公式(27.10)对于近晶相仍然是正确的. 对此,我们在近晶相中按照通常的规定,即下面的公式引入应力张量 σ_{ik}:

$$F_z=\partial_k\sigma_{zk}, \qquad (45.1)$$

式中 F_z 是"应力"之体积力(44.9)③. 我们同时引入对应于 $u_z=u$ 的应变张量,其不为零的分量为

---

① 该非稳定性分析,见 §21 的直杆压缩的非稳定性分析.

② k_c 只是确定在 xy 平面内扰动"波矢量"的绝对值,但是,发生的形变不是完全对称的. 最后的确定要求超出平衡方程符合线性(按 δu)近似的限制(这里的情况,类似于在流体平面平行层的非稳定性对流中所发生的那样,参见第六卷, §57). 详见 Delrieu J M. Journal of Chemical Physics, 1974,5(60):1081.

③ 参见第7页脚注①,这里指的是由单位体积内的应力形成的力. ——译者注

$$u_{zz}=\frac{\partial u}{\partial z},\quad u_{xz}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x},\quad u_{yz}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}.\tag{45.2}$$

由式(44.9)表示的力可以表示为式(45.1)的形式,假如用公式 $\sigma_{ik}=\lambda_{iklm}u_{lm}$ 通过应变张量表示应力张量,则具有①:

$$\lambda_{zzzz}=\rho_0 B',\quad \lambda_{xzxz}=\lambda_{zyzy}=-K_1\nabla_\perp^2,\quad \lambda_{zxzy}=\lambda_{zxzz}=\lambda_{zyzz}=0.\tag{45.3}$$

对于位移 $u_z=u$,公式(27.10)具有如下形式:

$$u(\boldsymbol{r})=-\lambda_{zklz}b\int_{S_D}n_l\frac{\partial}{\partial x_k}G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}f',\tag{45.4}$$

式中 $G\equiv G_{zz}$,即函数(44.12).

现在我们来研究两种特殊情形的位错——直线螺型位错和直线刃型位错.在第一种情形,位错轴与伯格斯矢量(即 z 轴)的方向相同.这种情形一般不需要任何新的计算.我们预先已清楚形变 u 仅与坐标 x,y 有关,但是,在 xy 内,介质是各向同性的.因此,可以直接利用§27 习题 2 的结果,即刻得到

$$u=\frac{b\varphi}{2\pi},\tag{45.5}$$

式中 φ 是在 xy 平面上径矢的极角.

我们现在转向比较复杂的刃型位错情形(P. G. de Gennes,1972).在这种情形,位错轴垂直于伯格斯矢量,假设它与 y 轴重合.于是,可以取 xy 的右半平面作为积分式(45.4)中的曲面 S_D,而与 xy 平面垂直的矢量 $\boldsymbol{n}$ 将沿负 z 轴方向.张量 λ_{zkzz} 的所有非零分量只有 $\lambda_{zzzz}=B'\rho_0$,于是公式(45.4)变为

$$u(\boldsymbol{r})=bB'\rho_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\partial G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\partial z}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'.$$

由式(44.12)将函数 G 代入上式,对 z 求导给出因子 $\mathrm{i}k_z$,并按 $\mathrm{d}y$ 积分得到 $2\pi\delta(k_y)$,然后,由对 $\mathrm{d}k_y$ 的积分消除 δ-函数.在积分

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x'}\mathrm{d}x'$$

中,为了保证收敛性,必须把 k_x 当作 $k_x-\mathrm{i}0$ 来处理.这样一来,对 $\mathrm{d}x',\mathrm{d}y',\mathrm{d}k_y$ 的积分完成以后,我们得到

$$u(\boldsymbol{r})=-b\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}k_x x)}{k_x-\mathrm{i}0}I(k_x,z)\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi},$$

式中

$$I(k_x,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_z\exp(\mathrm{i}k_z z)}{k_z^2+\lambda^2k_x^4}\frac{\mathrm{d}k_z}{2\pi},\quad \lambda^2=\frac{K_1}{B'\rho_0}.$$

---

① λ_{iklm} 的其余分量可由 $F_x=F_y=0$ 来选取,这些分量没有出现式(45.4)中.在这些分量中,有一些是算符.

最后这个积分,将借助于在复变量 k_z 的上半平面(当 $z>0$ 时)或下半平面(当 $z<0$ 时)上用无限远的半圆闭合回路积分来计算,并在极点 $k_z=\mathrm{i}\lambda k_x^2$ 或 $k_z=-\mathrm{i}\lambda k_x^2$ 求留数:

$$I=\pm\frac{\mathrm{i}}{2}\exp(-\lambda k_x^2|z|),$$

式中上面或下面的符号分别对应于 $z>0$ 和 $z<0$. 这样一来,位移

$$u(x,z)=\pm\frac{b}{4\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\lambda k_x^2|z|+\mathrm{i}k_x x\}\frac{\mathrm{d}k_x}{k_x-\mathrm{i}0}. \tag{45.6}$$

但是,更感兴趣的不是位移本身,而是它对坐标的导数. 对 x 的导数是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\pm\frac{b}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\lambda k_x^2|z|+\mathrm{i}k_x x\}\mathrm{d}k_x=\pm\frac{b}{4(\pi\lambda|z|)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4\lambda|z|}\right\}. \tag{45.7}$$

按照式(45.6),对 z 的导数与对 x 的导数之间的关系为公式

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\pm\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

由此

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{bx}{8(\pi\lambda)^{1/2}|z|^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4\lambda|z|}\right\}. \tag{45.8}$$

当 $|x|\to\infty$ 时,形变急速(按指数规律)趋向于零,而当 $|z|\to\infty$ 时要缓慢(按乘方规律)得多.

§46 近晶相液晶的运动方程

近晶相力学与向列相力学的共同之处是在这两种情形下所谈的问题都是关于带有附加(比较普通流体力学)变量的流体动力学问题. 在向列相情形,这个变量是指向矢 $\boldsymbol{n}$,而在近晶相情形,变量是层位移 u(P. C. Martin, O. Parodi, P. S. Pershan, 1972). 对于后者需要说明一下. 在流体动力学中,速度被定义为单位质量物质的动量. 在现在的情形下,速度分量 v_z 与导数 $\partial u/\partial t$ 是绝不应该一样的. 在近晶相中,质量的迁移(在 z 轴方向)不仅仅能够依靠层的形变实现,而且还可以借助于物质的"渗透"(物质穿过保持静止的一维结构)来实现(类似于在 §43 对胆甾相所描述的那样效果). 这种现象不是液晶特有的,类似的现象也可能出现在与缺陷的扩散有关的固体晶体中(参见 §22). 但是,在近晶相,上述现象原则上不能由于大量的"模糊"周期结构(比如含有大量的缺陷——空位)和扩大分子迁移率而消除.

在绝热运动时,每一个流体单元都迁移着自己固定的熵 s(相对于单位质量的),如果在任意的初始瞬时,熵 s 在整个介质体积内是恒定的,则在将来它仍然

是恒定的. 因为 s 恒定($s=\text{const}$)的条件对于单位质量的熵是正确的,这便于从一开始就将它引入单位质量介质的内能,我们通过 ε 表示内能. 对于形变的近晶相,该内能用类似于式(44.1)的公式表示:

$$\varepsilon_d=\varepsilon-\varepsilon_0(s)=\frac{A}{2\rho_0^2}(\rho-\rho_0)^2+\frac{C}{\rho_0}(\rho-\rho_0)\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{B}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\frac{K_1}{2\rho_0}(\nabla_\perp^2 u)^2,\tag{46.1}$$

式中 ρ_0 是未形变介质的密度,这里的系数 A,B,C 与式(44.1)里的不同,现在它们表示的是绝热弹性模量(假设被表示为 s 的函数),而不是像在式(44.1)中那样的等温弹性模量. 至于说到系数 K_1,它的等温值和绝热值是相同的,其理由与向列相的一样(见 §36 的最后)①.

物质单位质量占有的体积是 $1/\rho$. 因此能量微分的热力学关系为

$$\mathrm{d}\varepsilon=T\mathrm{d}s-p\mathrm{d}V=T\mathrm{d}s+\frac{p}{\rho^2}\mathrm{d}\rho.$$

因而,介质的压力可以由对表达式(46.1)微分求得:

$$p=\rho^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s\approx A(\rho-\rho_0)+\rho_0 C\frac{\partial u}{\partial z}.\tag{46.2}$$

继续构建近晶相的运动方程,很接近于在 §40 推导向列相运动方程时所运用的一系列运算. 为了突出这种类似性,我们将重新(就像在 §40 中那样)利用相对于单位体积的能量 $E=\rho\varepsilon$ 和熵 $S=\rho s$.

连续性方程具有通常的形式②:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0.\tag{46.3}$$

关于速度的动力学方程应为如下形式:

$$\rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}=\partial_k\sigma_{ik}\tag{46.4}$$

(比较式(40.7)). 应力张量的形式将在下面建立.

还有一个方程与附加变量的存在有关,并且方程本身就表示了 v_z 与 $\partial u/\partial t$ 的区别:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-v_z=N.\tag{46.5}$$

---

① 严格地说,在式(46.1)中,应当用 $\partial u/\partial z-\delta_0(s)$ 来代替 $\partial u/\partial z$,其中 $\delta_0(s)$ 是在没有外力而熵为 s 时 $\partial u/\partial z$ 的值. 考虑在给定 s 的运动时,我们可以把这个状态就选作未形变的状态,并假定 $\delta_0(s)=0$. 但是,我们强调指出,以后就不可以这样,例如,为了用公式 $T=(\partial\varepsilon/\partial s)_\rho$ 确定温度,将表达式(46.1)对 s 进行微分!

② 虽然我们最后关心的只是线性运动方程,但是我们不在每一个推导阶段进行线性化处理,因为这样会使公式的表示更为复杂.

其中量 N 是"渗透"速度,即流体相对于一维晶格的速度,它具有动力学性质,其表达式将在下面建立.

最后,用来计算介质耗散过程的熵方程具有式(40.8)的形式:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\nabla\cdot\left(S\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right)=\frac{2R}{T}. \tag{46.6}$$

像在§40中一样,我们计算在能量守恒定律的方程(40.11)中出现的单位体积介质之总能量对时间的导数.形式上的区别仅仅出现在式(40.12)中的最后一项上,现在是[①]

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,S}=\left(\frac{\partial E_d}{\partial(\partial_z u)}\right)_{\rho,S}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial t}+K_1(\nabla_\perp^2 u)\left(\nabla_\perp^2\frac{\partial u}{\partial t}\right)=-h\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot\{\cdots\} \tag{46.7}$$

(像在§40中一样,总散度项没有写出来),式中引入的符号:

$$h=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_d}{\partial(\partial_z u)}\right)_{\rho,S}-K_1\nabla_\perp^4 u=\rho_0 B\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+C\frac{\partial(\rho-\rho_0)}{\partial z}-K_1\nabla_\perp^4 u. \tag{46.8}$$

如果把 h 看作为矢量 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{n}h$($\boldsymbol{n}$ 是沿 z 轴的单位矢量)在 z 方向的分量,则极易确信,该矢量可以表示为散度形式:

$$h_i=\partial_k\sigma_{ik}^{(r)}, \tag{46.9}$$

式中的对称张量 $\sigma_{ik}^{(r)}$ 具有如下的分量:

$$\sigma_{xx}^{(r)}=\sigma_{yy}^{(r)}=K_1\nabla_\perp^2\frac{\partial u}{\partial z},\quad \sigma_{zz}^{(r)}=\rho_0 B\frac{\partial u}{\partial z}+C(\rho-\rho_0),$$

$$\sigma_{xz}^{(r)}=-K_1\nabla_\perp^2\frac{\partial u}{\partial x},\quad \sigma_{yz}^{(r)}=-K_1\nabla_\perp^2\frac{\partial u}{\partial y},\quad \sigma_{xy}^{(r)}=0. \tag{46.10}$$

由方程(46.5)将 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 代入式(46.7),并从总散度项中分出一项,然后我们重新写出:

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,S}=-hN-v_i\partial_k\sigma_{ik}^{(r)}+\nabla\cdot\{\cdots\}=-hN+v_{ik}\sigma_{ik}^{(r)}+\nabla\cdot\{\cdots\}.$$

该表达式与式(40.17)的区别只是符号 h,N 的意义不同[②].继续往下作,就像在§40中已经阐述的那样,我们即可得到从前的关于耗散函数的表达式(40.21):

$$2R=\sigma'_{ik}v_{ik}+Nh-\frac{\boldsymbol{q}}{T}\cdot\nabla T, \tag{46.11}$$

式中 σ'_{ik} 是下面的应力张量的黏性部分:

---

① 在这里和以下,我们忽略弹性模量沿介质的变化.

② 同样没有 $v_i(\partial_i E)_{\rho S}$ 项.但是,在现在的情形下,这样的项是三阶小量,在跟二阶小量相比较时可以忽略.

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma_{ik}^{(r)} + \sigma'_{ik}. \tag{46.12}$$

带有该应力张量的动力学方程(46.4),线性化(省略$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$项)以后将具有如下形式:

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\partial_i p + h_i + \partial_k \sigma'_{ik}, \tag{46.13}$$

式中矢量$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{n}h$由表达式(46.8)确定.

黏性应力张量σ'_{ik},热流$\boldsymbol{q}$和渗透速度N("热力学流")通常是用"热力学力",即$-v_{ik}/T, T^{-2}\partial_i T, -h/T$表示的线性表达式,并且这些表达式系数彼此之间的关系可由昂萨格原理得出.我们不再去重复相应的论证(比较§41,§43),而只写出结果.在这种情形下,我们假设(因为这通常是成立的)近晶相具有反演中心(到目前为止我们还没有假设过).于是,黏性应力张量由对于向列相的同一个公式(41.4)给出,并且应把$\boldsymbol{n}$理解为z轴方向.热流量和渗透速度由下面的表达式给出:

$$q_z = -\kappa_{\parallel}\frac{\partial T}{\partial z} + \mu h, \quad \boldsymbol{q}_{\perp} = -\kappa_{\perp}\nabla_{\perp}T, \quad N = \lambda_p h - \frac{\mu}{T}\frac{\partial T}{\partial z}, \tag{46.14}$$

并且,由耗散函数的正定性条件要求必须满足不等式:

$$\kappa_{\parallel}, \kappa_{\perp}, \lambda_p > 0, \quad \mu^2 < T\lambda_p\kappa_{\parallel}. \tag{46.15}$$

渗透现象使在近晶相中有可能存在类似于在§43最后对于胆甾相描述的效应.假如把近晶相的周期结构用某种方式固定在空间上,有可能沿z轴存在均匀的稳流.从式(46.13)得到,对于这样的流动$\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = h$,而由式(46.5)及式(46.14)的$N$得到

$$v_z = -\lambda_p h = -\lambda_p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}. \tag{46.16}$$

对上面关于近晶相动理系数的讨论,必须作一重要的说明.特别是,在§45已经提到的,在近晶相上,涨落的发散性在动理学现象方面有强烈表现,并可以显著的改变它的性质①.

§47 近晶相液晶中的声

在普通流体中,以及在向列相液晶中,它们只有一个弱阻尼声振动分支——纵向声波.在晶态固体和非晶态固体中,有三个线性色散关系的声(声学)振动分支(§22,§23).一维晶体,即这里的近晶相占据中间位置,有两个声学分支(P. G. de Gennes,1969).在这里,我们对于这些波的阻尼系数不感兴趣,只关注确定波的传播速度,故在运动方程中忽略所有的耗散项.完全的线性运动方程组

---

① 见 Е. И. Кац,В. В. Лебедев. 实验物理和理论物理杂志(ЖЭТФ),1983,85:2019.

由连续性方程和动力学方程组成：

连续性方程

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\rho\,\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{47.1}$$

（在这里和下面，我们省略 ρ_0 的下标"0"，ρ' 和 p' 是密度和压力的可变部分），方程(46.5)在没有渗透时归结为

$$v_z=\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{47.2}$$

动力学方程(46.13)现在为

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\nabla p'+\boldsymbol{n}h, \tag{47.3}$$

而根据式(46.2)有

$$p'=A\rho'+\rho C\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{47.4}$$

对于 h，应在表达式(46.8)中忽略含有高阶导数的 $K_1\nabla_\perp^2\nabla_\perp^2 u$ 项，因为它是比波矢量(模) k 更高阶的小量，对于声波来说它应被视为小量. 于是

$$h=\rho B\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+C\frac{\partial \rho'}{\partial z}. \tag{47.5}$$

在真实的近晶相中，通常 B 和 C 的值比 A 小. 我们推测在这些条件下近晶相两个声学分支的性质将变得更加明显.

如果在运动方程中忽略所有包含系数 B 和 C 这两个小量的项，则它们将化为具有状态方程 $p'=A\rho'$ 的普通流体的运动方程，亦即具有可压缩性 $(\partial p'/\partial\rho')_s=A$. 相应于这种情形的振动是通常的声波——使介质压缩和拉伸的纵波. 它的传播速度为

$$c_1=A^{1/2}, \tag{47.6}$$

而且在所考虑的近似情形下与方向无关.

在第二个声学分支中波的传播速度 c_2 与 c_1 相比较时，我们把它视为小量：$\omega/k=c_2\ll c_1$. 因此，对于该运动来说，可以认为介质是不可压缩的(比较 188 页脚注). 此时，连续性方程归结为不可压缩性条件：$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$. 在式(47.5)中省略了第二项，因而方程(47.3)具有如下形式：

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\nabla p'+\boldsymbol{n}\rho B\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{47.7}$$

将该方程的 z 方向分量对 z 求微分，并将 $v_z=\partial u/\partial t$ 代入，即得到

$$\rho\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}=-\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2}+\rho B\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2},$$

式中 $\delta=\partial u/\partial z$. 对方程(47.7)作用散度算子 $\nabla\cdot$，由于不可压缩性条件，我们

得到

$$\nabla^2 p' = \rho B \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2}.$$

最后，从上面这两个方程消去 p'，即得到一个关于 δ 的方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\delta = B\left\{ -\frac{\partial^4 \delta}{\partial z^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla^2\delta \right\}. \tag{47.8}$$

位移 u 与坐标 z 之间的关系，意味着邻近层之间的距离 a 改变：$\delta a = (\partial u/\partial z)a$，量 $\delta = \partial u/\partial z$ 本身给出距离 a 的相对变化. 这样一来，方程(47.8)描述的是横波($\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}=0$)的传播，在横波的传播中，层间距离在不变的密度下经受振动. 对于平面波，$\delta \propto \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}\omega t)$，由式(47.8)我们有

$$\omega^2 k^2 = Bk_\perp^2 k_z^2,$$

由此得到速度

$$c_2 = B^{1/2}\sin\theta\cos\theta, \tag{47.9}$$

式中 θ 是 $\boldsymbol{k}$ 和 z 轴之间的夹角. 速度 c_2 是各向异性的，并且，无论是沿 z 轴($\theta = 0$)传播，还是在 xy 平面($\theta = \pi/2$)上传播，该速度都变为零. 当角度趋近于这两个值时，耗散效应所起的作用增加了(见本节习题 2 和 3).

习　　题

习题 1　试求近晶相在模量 A, B, C 之间为任意关系时声波的传播速度.

解：将方程(47.3)对 t 微分，并利用式(47.1)，(47.2)消去导数 $\partial\rho'/\partial t$ 和 $\partial u/\partial t$，即得到方程

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} = A\,\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) - C\,\nabla\frac{\partial v_z}{\partial z} + \boldsymbol{n}\left[-C\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + B\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right].$$

对于平面波，$\boldsymbol{v} \propto \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}\omega t)$，上面的方程归结为下面的关系式：

$$-\omega^2\boldsymbol{v} = -A\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}) + C\boldsymbol{k}k_z v_z + \boldsymbol{n}[Ck_z(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}) - Bk_z^2 v_z]. \tag{1}$$

设波矢量 $\boldsymbol{k}$ 位于 xz 平面上. 这样，由式(1)得出位于同一个平面上的速度 $\boldsymbol{v}$，而 x 方向和 z 方向的分量由下面两个方程组给出：

$$v_z[c^2 - (A+B-2C)\cos^2\theta] + v_x(C-A)\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$v_z(C-A)\sin\theta\cos\theta + v_x[c^2 - A\sin^2\theta] = 0,$$

式中 $c = \omega/k$ 是波速，而 θ 是 $\boldsymbol{k}$ 和 z 轴之间的夹角. 使该方程组的系数行列式等于零，我们得到色散方程

$$c^4 - c^2[A + (B-2C)\cos^2\theta] + (AB - C^2)\sin^2\theta\cos^2\theta = 0.$$

该方程(按 c^2)的较大和较小的平方根分别确定速度 c_1 和 c_2. 特别是

$$c_1 = \begin{cases} A^{1/2} & (\theta = \pi/2), \\ (A+B-2C)^{1/2} & (\theta = 0). \end{cases}$$

而在这两个方向上的速度 c_2 为零.

习题 2 试确定考虑耗散时在层平面上传播的第二声学分支的色散规律($\nu=\pi/2$).

解: 在该习题的条件下,速度$\boldsymbol{v}$ 沿着 z 轴方向,所有的量都依赖于 x. 将方程(46.13)在 z 方向取投影,我们得到

$$-\mathrm{i}\omega\rho v = -K_1k^4u + \mathrm{i}k\sigma'_{zx}. \tag{2}$$

借助于式(41.7)求出

$$\sigma'_{zx} = \frac{\mathrm{i}k\eta_3}{2}v.$$

不难验证,由于参数 $K_1\rho/\eta_3^2$ 是小量(比较式(42.7)),故式(2)左边可以忽略,而在小的 k 时,渗透作用是不重要的,因此 $v=-\mathrm{i}\omega u$. 最后得到色散规律:

$$\mathrm{i}\omega = \frac{2K_1}{\eta_3}k^2.$$

习题 3 试确定考虑耗散时在垂直层平面的方向上传播的第二声学分支的色散规律($\theta=0$).

解: 在这种条件下,不可压缩条件导致$\boldsymbol{v}=0$,近晶相的运动只能借助于渗透来实现. 由式(46.5)和(46.14),这时有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_p\rho B\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

或

$$\mathrm{i}\omega = \lambda_p\rho Bk^2.$$

我们在式(46.14)中忽略了带有温度梯度的项. 如果温度弛豫比位移快的话,即如果 $\kappa_{\parallel} >> \lambda_p\rho B$,这是可能的. 但是,必须注意,在这种情形下,$B$ 是等温的弹性模量.

索　　引[1]

B

C

D

F

---

① 这个索引不重复目录,而是其补充.索引包括目录中未直接反映出来的术语和概念.

G

H

J

N

O

P

Q

R

PDG



[General Information]
□□=□□□□□□□ □□□ □□□□ □5□
□□=
□□=
□□□=
□□□□=
SS□=12307656
DX□=000006696696
url=http://www.yuyanwz.cn/n/drspath_0278635
955d8ea01f3746d2c1b3880501f9756e0e9f1a6877b
387289d4e786dcbed7287f0671a6d62cb28c0809e19
09c8514f1db61ad1c53e10598897a000f4fdccc4446
219c2743ffd3530647e0b67c54603e135b836044e68
c34dec438e28c2c5aac98b4b1d568cc6d80f9946dab
73a3e25b7670467ee81ccef252a4cc460ce4c14c58
99340385dc0b55db46b4b60d5b57742b3a948f9.sht
ml?firstdrs=http%3A%2F%2Fbook.duxiu.com%2Fb
ookDetail.jsp%3FdxNumber%3D000006696696%26d
%3DD0C7C3F07223E6FCA3674A7C37636DE1